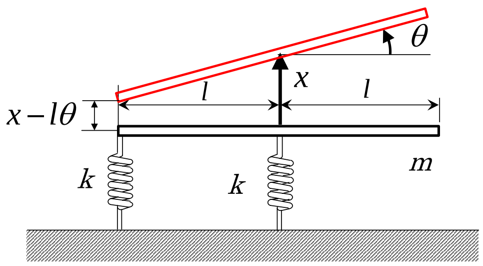
機械力学２　第 12 回目　授業課題　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　令和元年７月９日

機械科学　（　　　）年（A，　N）クラス　（　　　　　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　）

以下の振動系の固有角振動数と振動モードを求めよ．




棒の重心まわりの慣性モーメントは，$J=\dfrac{1}{12}m(2l)^2=\dfrac{1}{3}ml^2$

座標を上図のように取ると運動方程式は

$m\ddot{x}=-kx-k(x-l\theta)_2$

$J\ddot{\theta}=k(x-l\theta)l$

行列・ベクトル形式で整理すると

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -kl \\ -kl & kl^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

自由振動解を仮定すると，$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix}\sin(\omega t+\phi)$

と置き上式に代入して整理すると固有値問題を得る．

$$\begin{bmatrix} 2k-m\omega^2 & -kl \\ -kl & kl^2-J\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

係数行列の行列式をゼロとおき，振動数方程式を得る．

$(2k-m\omega^2)(kl^2-J\omega^2)-k^2l^2=mJ\omega^4-(2kJ+mkl^2)\omega^2+k^2l^2=0$ となる．

解の公式から，

$$\omega^2=\frac{(2J+ml^2)\pm\sqrt{(2J+ml^2)^2-4mJk^2l^2}}{2mJ}$$

ここで，棒の慣性モーメントを代入して整理すると，

1 次：$\omega_{n1}^2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\dfrac{k}{m}$　，2 次：$\omega_{n2}^2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\dfrac{k}{m}$　となる．

それぞれの振動モード（振幅比）は

1 次：$\omega=\omega_{n1}$ のとき

$$\begin{bmatrix} 2k-\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}k & -kl \\ (略) & (略) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X^{(1)} \\ \Theta^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ よって，$\dfrac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}}=\dfrac{2l}{-1+\sqrt{13}}$ ．

2 次：$\omega=\omega_{n2}$ のとき

$$\begin{bmatrix} 2k-\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}k & -kl \\ (略) & (略) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X^{(2)} \\ \Theta^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ よって，$\dfrac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}}=\dfrac{-2l}{1+\sqrt{13}}$ ．