以下の直交関数の積分をせよ．ただし，周期は$T=2\pi/\omega$とする（直交関数とは？）．

（１）$\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^T \sin n\omega t \sin n\omega t\, dt$

（２）$\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t\, dt$

（３）$\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^T \cos n\omega t \sin n\omega t\, dt$

これは，直交関数の問題なので，(1)以外は０になることが予想される．

(1) 2 倍角の公式　$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$　より，$\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1-\cos 2n\omega t}{2} dt$　とできる．

$$\frac{\omega}{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos 2n\omega t dt\right\} = \frac{\omega}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{\omega} - \left[\frac{1}{2n\omega}\sin 2n\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\right\} = 1$$

(2) $\sin n\omega t \sin m\omega t = \dfrac{1}{2}\cos(n-m)\omega t - \dfrac{1}{2}\cos(n+m)\omega t$　より

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n-m)\omega t\, dt - \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n+m)\omega t\, dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left[\frac{1}{(n-m)\omega}\sin(n-m)\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} - \frac{\omega}{2\pi}\left[\frac{1}{(n+m)\omega}\sin(n+m)\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

(3) これは，$\cos n\omega t \sin m\omega t = \dfrac{1}{2}\sin(n+m)\omega t - \dfrac{1}{2}\sin(n-m)\omega t$ で，$n=m$　としてもよいし，

2 倍角の公式　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$　を利用してもよい．

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin 2n\omega t\, dt = \frac{\omega}{2\pi}\left[\frac{-1}{2n\omega}\cos 2n\omega t\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{-1}{4\pi}\left[\cos 4n\pi - 1\right] = \frac{-1}{4\pi}\left[1-1\right] = 0$$