

第2章 1自由度系の振動

2.1 非減衰自由振動

$$\text{M-K系} \quad m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0$$

まずは、
運動方程式をたてられるようにする

次に、
運動方程式の解法を修得する

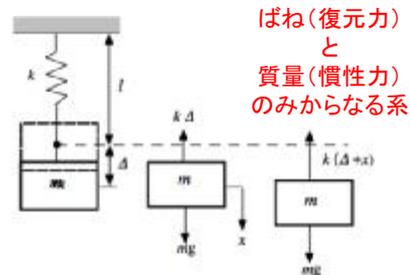


図2.1 ばね-質量系の力学モデルと自由物体線図

天井にばねの一端を固定し、別の端におもり(質量)をとりつける(最も簡単な振動系)
おもりを吊して、ばねとつり合った位置を平衡(中立)位置と云う。

平衡位置での力のつりあい

$$mg = k\Delta \quad (2.1)$$

m : 質量
 g : 重力加速度
 k : ばね定数
 Δ : 変位(自由長から平衡位置)

第2章 1自由度系の振動

2.1 非減衰自由振動

平衡位置からさらに x だけ移動させると、おもりに働く力は

$$f = mg - k(x + \Delta)$$

式(2.1)から平衡位置での力のつりあいにより、打ち消しあう項があるので
復元力は

$$f = -kx \quad (2.2)$$

注) 平衡位置からの変位のみ依存

運動方程式は(定係数常微分方程式)

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (2.3)$$

暗黙の了解としてわかっているので、上記は省略して以下のように表記する

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

x だけ(1つの座標)で運動を表すことができるので、1自由度系という

2.1 非減衰自由振動

次に、運動方程式の解をもとめる。

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.4)$$

ただし、 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ とおく(固有角振動数(rad/s):重要)

基本解を以下のようにおく

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

これを式(2.4)に代入して整理する

$$(\lambda^2 + \omega_n^2) e^{\lambda t} = 0 \quad (2.5)$$

上式は振動状態を表すので、括弧内がゼロにならないといけない
(動的に力がつり合っている)

虚数単位をつかって表す

$$\lambda^2 = -\omega_n^2$$



$$\lambda = \pm j\omega_n \quad (j^2 = -1)$$

2.1 非減衰自由振動

一般解を求める

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \bar{A}_1 e^{j\omega_n t} + \bar{B}_1 e^{-j\omega_n t}$$

オイラーの公式を使って $e^{\pm j\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm j \sin \omega_n t$

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{A}_1 (\cos \omega_n t + j \sin \omega_n t) + \bar{B}_1 (\cos \omega_n t - j \sin \omega_n t) \\ &= (\bar{A}_1 + \bar{B}_1) \cos \omega_n t + (\bar{A}_1 - \bar{B}_1) j \sin \omega_n t \\ &= A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (2.6)$$

ただし、 $\bar{A}_1 = (A_1 - jB_1)/2$ $\bar{B}_1 = (A_1 + jB_1)/2$

x は実数なので、任意定数 \bar{A}_1 および \bar{B}_1 は共役複素数である。

A_1 および B_1 は実数の任意定数であり、初期条件により決定する。

第2章 1自由度系の振動

2.1 非減衰自由振動

初期条件 (t=0) より任意定数の決定

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.7)$$

変位の式 (再掲)

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t \quad (2.6)$$

式(2.6)を時間で微分 (速度の式)

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + B_1 \omega_n \cos \omega_n t \quad (2.8)$$

$$\text{よって} \quad A_1 = x_0 \quad B_1 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

一般解は,

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.9)$$

$$\text{合成すると} \quad x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \sin(\omega_n t + \phi) \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_n}{v_0}\right) \quad (2.10)$$

自由振動の解は初期条件により決定する

第2章 1自由度系の振動

2.1 非減衰自由振動

固有角振動数

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{rad} / \text{s}) \quad (2.11)$$

周期 (固有周期)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{s}) \quad (2.12)$$

固有振動数

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Hz}) \quad (2.13)$$

参考:ばねの伸びと重力加速度から固有角振動数を求める

$$mg = k \Delta \quad \longrightarrow \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

実用上は、正確にばね定数と質量がわからなくても、ばねの自由長から平衡位置までの伸び Δ と重力加速度 g がわかれば固有角振動数が概算可能



2.1 非減衰自由振動

例題2.1 図の2.3のように、自重を無視できる長さ l の糸の先に質量 m を取り付け天井から吊し、この質量に水平方向に変位を与えて振動させる。このような系を単振り子という。微小回転振動するときの単振り子の固有各振動数 ω_n を求めよ。ただし、重力加速度を g とする。

(解)

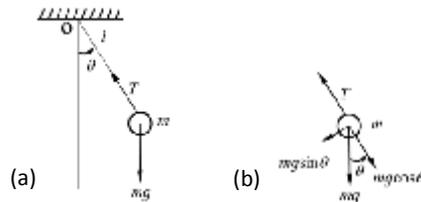


図2.3 (a)単振り子と(b)自由物体線図

※支点O周りの回転運動を考える $J_0 \ddot{\theta} = -(mg \sin \theta)l$
 慣性モーメント: $J_0 = ml^2$
 角変位が微小であるとすれば $\theta \ll 1$ $\sin \approx \theta$
 単位がrad(ラジアン)の時

2.1 非減衰自由振動

例題2.1 図2.3のように、自重を無視できる長さ l の糸の先に質量 m を取り付け天井から吊し、この質量に水平方向に変位を与えて振動させる。このような系を単振り子という。微小回転振動するときの単振り子の固有各振動数 ω_n を求めよ。ただし、重力加速度を g とする。

(解)

運動方程式は $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$

固有角振動数は $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 固有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

振り子の等時性について調べること
 等時性の前提(限界or現実)

教科書の別解は省略

2.1 非減衰自由振動

例題2.2 図2.4のようにU字管において、水面を平衡位置より x だけ上昇させたとき、水柱は単振動を生じる。このときの系の固有角振動数 ω_n を求めよ。ただし、管の断面積を A 、水柱の長さを l 、水の質量密度を ρ とする。水柱を管壁の間の摩擦は無視できると仮定する。

(解)

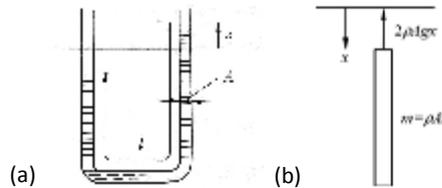


図2.4 (a)U字管内の水柱の上下振動と(b)自由物体線図

慣性項は水柱全体の質量から $\rho A l$ } 運動方程式: $\rho A l \ddot{x} = -2\rho A g x$
 復元力項は左右の水面高さの差 $-2\rho A g x$

整理すると: $\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0$ 固有角振動数: $\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}}$

2.1 非減衰自由振動

例題2.3 図2.5のように、長さ l で断面一様な弾性軸(ねじり剛性 K)の先端に同軸に円板が取り付けられている。この円板を角度 θ だけねじって振動させた場合の回転系の固有角振動数 ω_n を求めよ。ただし、弾性軸の慣性モーメントは、円板のそれに比べて無視できるほど小さいと仮定する。ただし、弾性軸の直径を d 、横弾性係数を G とする。

(解)

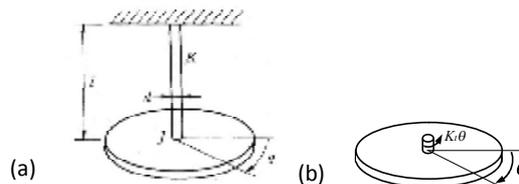


図2.5 (a)弾性軸のねじり振動と(b)自由物体線図

ねじり剛性は、材料力学の軸のねじり理論から導出する $K_t = GI_p/l = \pi G d^4/32l$

断面極2次モーメント $I_p = \pi d^4/32$

運動方程式は $J\ddot{\theta} = -K_t\theta$ \rightarrow $\ddot{\theta} + \frac{K_t}{J}\theta = 0$

固有角振動数: $\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J}}$

第2章 1自由度系の振動

2.2 エネルギー法

エネルギー法 後述の Lagrangeの方程式 の基礎

固有角振動数をエネルギー保存の法則から求める

$$T + U = E \quad (\text{一定}) \quad (2.15)$$

T : 運動エネルギー U : ポテンシャルエネルギー

これより, エネルギーの和の時間変化率は常に0なので

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2.16)$$

上式は1自由度の自由振動にしか適用できない(理由は考えること)

図2.1の1自由度振動系では

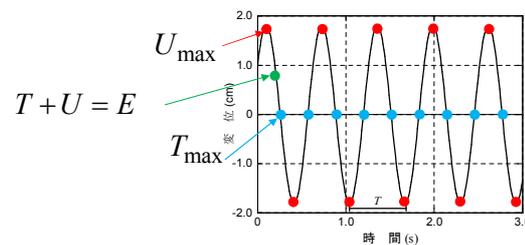
$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2}kx^2$$

第2章 1自由度系の振動

2.2 エネルギー法

運動エネルギーの最大値とポテンシャルエネルギーの最大値は等しいので

$$T_{\max} = U_{\max} = E \quad (2.21)$$



上式は1自由度の自由振動にしか適用できない(上の図から理由は考えること)

1自由度系の自由振動の一般解は $x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi)$

式(2.21)に代入する \rightarrow $\omega_n = \sqrt{k/m}$ を得る

※式(2.22)は自分で導出せよ

2.2 エネルギー法

例題2.4 図2.6のようなばね-質量系において、長さ l のばねの自重が先端の質量 m に比較して無視できない場合の系の固有角振動数 ω_n を求めよ。

(解)

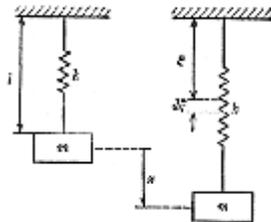


図2.6 ばねの自重を考慮した1自由度ばね-質量系の力学モデル

※ばねは上端が静止して、下端は質量と共に運動する

ばねの上端から ξ の位置の微小部分の $d\xi$ の変位:

比率から $\frac{\xi}{l} = \frac{\xi + u}{l + x}$ \longrightarrow $u(x) = \frac{\xi(l+x) - l\xi}{l} = \frac{\xi x}{l}$ 教科書の式はまちがいの？

2.2 エネルギー法

例題2.4 図2.6のようなばね-質量系において、長さ l のばねの自重が先端の質量 m に比較して無視できない場合の系の固有角振動数 ω_n を求めよ。

(解)

運動エネルギー $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \int_0^l \frac{1}{2} \rho' d\xi \left(\frac{\xi}{l} \dot{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{3} \rho' l \right) \dot{x}^2$

ポテンシャルエネルギー $U = \frac{1}{2} k x^2$

1自由度系の自由振動なので、 $x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi)$ を代入

$T_{\max} = U_{\max}$ より $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \rho' l / 3}}$

\longrightarrow ばねの自重の1/3が実効質量として働く

2.2 エネルギー法

例題2.5 図2.7のように固定軸Oの周りを回転運動する剛体(重心G)を物理振り子という。角変位 θ が微小であるとき、系の固有角振動数 ω_n を求めよ。

(解)

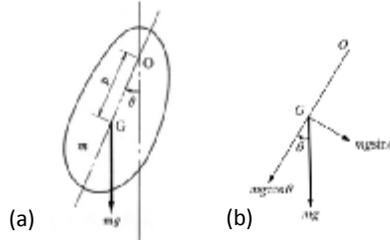


図2.7 (a)物理振り子(Gは重心, Oは回転中心)と (b)自由物体線図

※平行軸の定理:

重心まわりの慣性モーメントから固定軸Oまわりの慣性モーメントを求める

$$J_O = J_G + mp^2$$

モーメントのつりあいから求める場合も同様に必要

2.2 エネルギー法

例題2.5 図2.7のように固定軸Oの周りを回転運動する剛体(重心G)を物理振り子という。角変位 θ が微小であるとき、系の固有角振動数 ω_n を求めよ。

(解)

運動エネルギー $T = \frac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2$

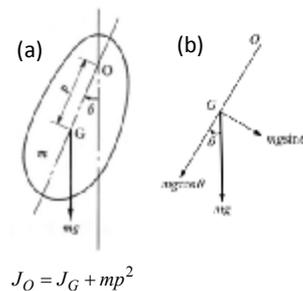
ポテンシャルエネルギー $U = mgl(1 - \cos\theta)$

解は $\theta(t) = \Theta \sin(\omega_n t + \phi)$

よって $T_{\max} = \frac{1}{2} J_o \Theta^2 \omega_n^2$

$U_{\max} = \frac{1}{2} mgl \Theta^2$

$T_{\max} = U_{\max}$ より $\omega_n = \sqrt{mgl / J_o}$



$J_O = J_G + mp^2$

$\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots \quad (\theta \ll 1)$

2.2 エネルギー法

例題2.6 図2.8の系では2枚の円板が同軸に固定された滑車が、平衡位置から回転振動している。この回転系の固有角振動数 ω_n を求めよ。ただし、滑車の内径を r_1 、外径を r_2 、軸心周りの慣性モーメントを J_o とする。

(解)

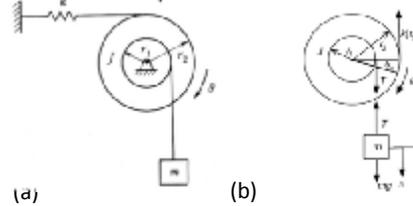


図2.8 (a)ばねと質量が付けられた滑車と (b)自由物体線図

$$\text{運動エネルギー} \quad T = \frac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (r_1 \dot{\theta})^2$$

$$\text{ポテンシャルエネルギー} \quad U = \frac{1}{2} k (r_2 \theta)^2$$

$$\text{解は } \theta(t) = \Theta \sin(\omega_n t + \phi)$$

$$T_{\max} = U_{\max} \quad \text{より} \quad \omega_n = \sqrt{mgp / J_o}$$

2.2 エネルギー法

例題2.6 図2.8の系では2枚の円板が同軸に固定された滑車が、平衡位置から回転振動している。この回転系の固有角振動数 ω_n を求めよ。ただし、滑車の内径を r_1 、外径を r_2 、軸心周りの慣性モーメントを J_o とする。

(解)

$$\text{ここで,} \quad T_{\max} = \frac{1}{2} J_o \Theta^2 \omega_n^2 + \frac{1}{2} m r_1^2 \Theta^2 \omega_n^2$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k r_2^2 \Theta^2$$

$$T_{\max} = U_{\max} \quad \text{より} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k r_2^2}{(J_o + m r_1^2)}}$$

別解(ニュートンの運動方程式による)は各自考える

2.3 減衰自由振動

2.3.1 粘性減衰自由振動

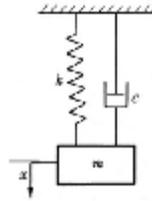


図2.9 ばね-質量-ダッシュポット系の力学モデル

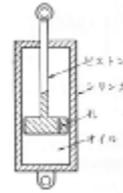


図2.10 オイルダンパ

減衰力: 粘性抵抗(速度に比例) 都合がよい

$$f = -c\dot{x} \quad c: \text{減衰係数}$$

実際は,
 流体の粘性抵抗: 低速では線形(1次)に比例, 速くなると2乗に比例
 摩擦(クーロン減衰): 大きさ一定
 構造減衰: 内部ひずみに関連(複素数で表す)

2.3 減衰自由振動

運動方程式

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad (2.23)$$

上式をmで除して, 変形する

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (2.24)$$

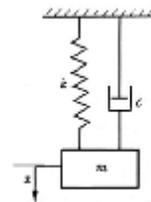
$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad \begin{array}{l} \zeta \text{ は減衰比(無次元量)} \\ c \text{ は減衰係数(単位 } N \cdot s / m) \end{array}$$

基本解(減衰が無いときと同様) $x(t) = e^{\lambda t}$

代入して $(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)e^{\lambda t} = 0$

$x(t) = e^{\lambda t} \neq 0$ なので $e^{\lambda t} = 0$ は静止状態を表す

特性方程式 $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$ を選ぶ



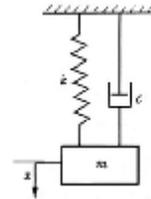
2.3 減衰自由振動

特性方程式

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (2.25)$$

λ についての2次方程式の解は

$$\lambda = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$



この解は、平方根内部の正負により場合分けをしないとイケない

- | | | | |
|-----------------|-------------|-------|----------------|
| (1) $\zeta > 1$ | 過減衰 | 振動しない | } 無周期運動 |
| (2) $\zeta = 1$ | 臨界減衰 | 振動しない | |
| (3) $\zeta < 1$ | 不足減衰 | 振動する | 減衰自由振動 |

2.3 減衰自由振動

- (1) $\zeta > 1$ **過減衰**

$$\lambda_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \quad \lambda_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

2つの基本解は

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

一般解は、基本解に任意定数を乗じて和をとる

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (2.26)$$

上式を微分して

$$\dot{x}(t) = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.27)$$

初期条件 ($t=0$) より任意定数の決定 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.7)$

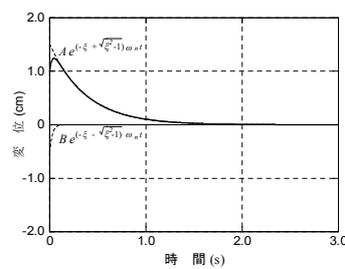


図2.11 過減衰 ($\zeta=2$) の例

第2章 1自由度系の振動

2.3 減衰自由振動

(1) $\zeta > 1$ **過減衰**

一般解は,

$$x(t) = Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.28)$$

ただし

$$A = \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{v_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})x_0 \omega_n}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$B = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-v_0 - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})x_0 \omega_n}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

参考: $-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$ $-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$

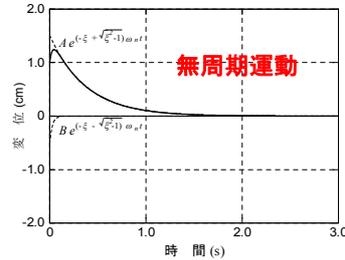


図2.11 過減衰($\zeta=2$)の例

第2章 1自由度系の振動

2.3 減衰自由振動

(2) $\zeta = 1$ **臨界減衰**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

基本解をつぎのように選ぶ

$$x_1(t) = e^{-\omega_n t} \quad x_2(t) = t e^{-\omega_n t}$$

一般解は, 基本解に任意定数を乗じて和をとる

$$x(t) = Ae^{-\omega_n t} + B t e^{-\omega_n t} \quad (2.29)$$

初期条件, 式(2.7)を用いて

$$A = x_0 \quad B = v_0 + \omega_n x_0$$

式(2.29)は

$$x(t) = \{x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t\}e^{-\omega_n t} \quad (2.30)$$

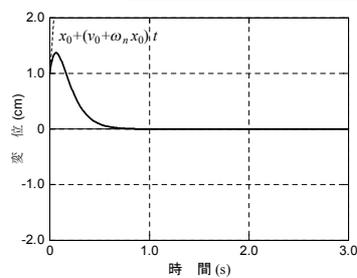


図2.12 臨界減衰($\zeta=1$)の例

減衰係数(臨界減衰係数)

$$c_c = 2\sqrt{mk}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = 1$$

第2章 1自由度系の振動

2.3 減衰自由振動

(3) $\zeta < 1$ 不足減衰

$$\lambda_1 = (-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \quad \lambda_2 = (-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$$

2つの基本解は

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

一般解は、基本解に任意定数 \bar{A}_1, \bar{B}_1 を乗じて和をとる

$$x(t) = \bar{A}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{B}_1 e^{\lambda_2 t} \quad (2.32)$$

$x(t)$ は実数なので、 \bar{A}_1, \bar{B}_1 は共役複素数となる

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{A}_1 e^{(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + \bar{B}_1 e^{(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} = e^{-\zeta\omega_n t} (\bar{A}_1 e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + \bar{B}_1 e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \{ \bar{A}_1 (\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + j\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + \bar{B}_1 (\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - j\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \{ (\bar{A}_1 + \bar{B}_1) \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + j(\bar{A}_1 - \bar{B}_1) \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \{ A_1 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + B_1 \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \} \end{aligned} \quad (2.32)$$

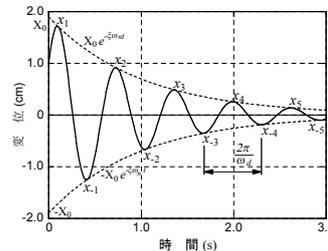


図2.13 臨界減衰($\zeta=1$)の例

2.3 減衰自由振動

(3) $\zeta < 1$ 不足減衰

初期条件 ($t=0$) より任意定数の決定

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.7)$$

実数の任意定数を決定する.

$$A_1 = x_0 \quad B_1 = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

任意定数を式(2.32)に代入して、三角関数の合成を用いると

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \zeta\omega_n x_0)^2}{\omega_n^2 (1-\zeta^2)}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi) \quad (2.34) \\ \phi &= \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n x_0}{v_0 + \zeta\omega_n x_0} \right\} \end{aligned}$$

減衰固有角振動数 $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ 減衰固有周期 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$

第2章 1自由度系の振動

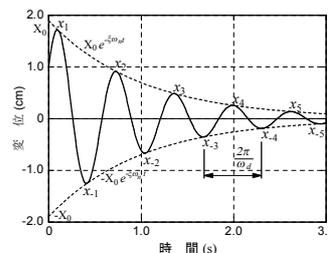


図2.12 臨界減衰($\zeta=1$)の例

第2章 1自由度系の振動

2.3 減衰自由振動

対数減衰率の導出

隣り合う波形の振幅比

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{(-\zeta\omega_n t_0)}}{e^{(-\zeta\omega_n (t_0+T_d))}} = e^{(\zeta\omega_n T_d)} = e^{\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

上式は各自確認すること。

この式が納得できれば、式(2.35)は容易に理解できる

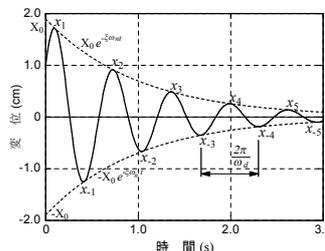


図2.13 臨界減衰(ζ=1)の例

対数減衰率

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln \frac{x_{-n}}{x_{-(n+1)}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.36)$$

通常は、一回の周期だけでは精度が不十分なので、n周期を考える

$$n\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} + \ln \frac{x_2}{x_3} + \ln \frac{x_3}{x_4} + \dots + \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln \frac{x_1}{x_{n+1}} \quad \therefore \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_{n+1}}$$

第2章 1自由度系の振動

2.3 減衰自由振動

式(2.36)から、減衰比は

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (2.37)$$

対数減衰比の近似 $\zeta \ll 1$ のとき

近似: $\delta \approx 2\pi\zeta \quad (2.38)$

厳密: $\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.36)$

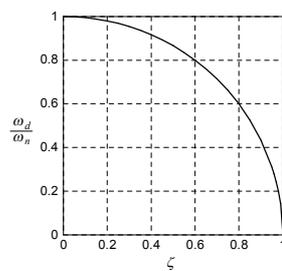


図2.14 減衰比と減衰固有角振動数の関係

表2.1

材料	減衰比ζ
真鍮	3×10^{-4}
アルミ合金	5×10^{-4}
合金鋼	5×10^{-4}
軟鋼	8×10^{-4}
鑄鉄	16×10^{-4}
木材	48×10^{-4}
コンクリート	120×10^{-4}
ゴム	400×10^{-4}

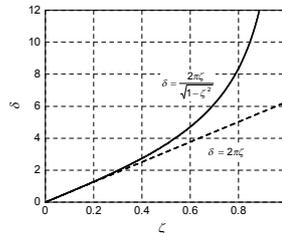


図2.15 式(2.36)と(2.38)の比較

2.3 減衰自由振動

例題2.7 図2.9において、質量 $m = 100\text{kg}$ 、ばね定数 $k = 100\text{N/m}$ 、減衰係数 $c = 30\text{Ns/m}$ とするとき、減衰比 ζ と対数減衰率 δ を求めよ。

(解)

この問題は全て定義の式から解ける

減衰比:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{30}{2\sqrt{100 \cdot 100}} = 0.15$$

対数減衰率:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \cdot 0.15}{\sqrt{1-0.15^2}} = 0.953$$

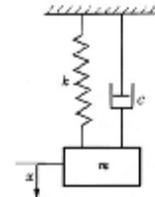


図2.9 ばね-質量-ダッシュポット系の力学モデル

2.3 減衰自由振動

例題2.8 図2.9において、質量 $m = 50\text{kg}$ の物体が10秒間に5回繰り返して振動して、その変位振幅が1/32に減少したとき、ばね定数 k と減衰係数 c を求めよ。

(解)

10秒間に5回繰り返して振動したので、減衰固有周期 $T_d = 2$ 秒となる。したがって

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 2 \quad (1)$$

対数減衰率 δ は、5回繰り返して振動して変位振幅比が1/32となるから

$$\delta = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{32}{1}\right) = \frac{1}{5} \ln(2^5) = \ln 2 = 0.693 \quad (2)$$

上式の δ を式(2.37)に代入すれば、減衰比 $\zeta = 0.110$ となる。この値を式(1)に代入すると、 $\omega_n = 3.161\text{rad/s}$ となる。したがって k, c は次のように求まる。

$$k = m\omega_n^2 = 50 \times 3.161^2 = 500\text{N}$$

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2 \times 0.110 \times \sqrt{50 \times 500} = 34.79\text{Ns/m}$$

2.3 減衰自由振動

2.3.2 クーロン減衰自由振動

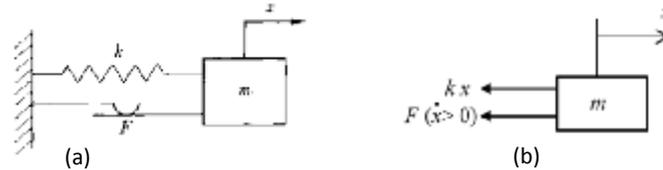


図2.16 クーロン減衰のあるばね-質量系の (a)力学モデルと (b)自由物体線図
 摩擦力:運動の向きと反対方向に大きさ一定の力がはたらく

クーロン摩擦(乾性摩擦)

$$F = \mu N$$

$$m\ddot{x} = -kx + \begin{cases} -F & (\dot{x} > 0) \\ +F & (\dot{x} < 0) \end{cases} \quad (2.39)$$

μ 摩擦係数

N 垂直抗力

$s = F/k$ において, 上式を書きなおす

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

2.3 減衰自由振動

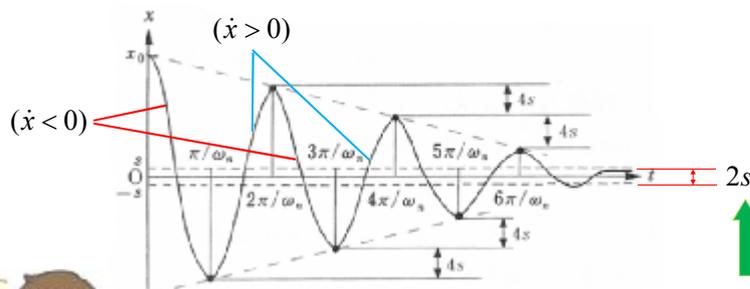
2.3.2 クーロン減衰自由振動

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = -s \omega_n^2 \quad (\dot{x} > 0) \quad (2.40)$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = +s \omega_n^2 \quad (\dot{x} < 0)$$



交互にいれかわる



±sの範囲は, 摩擦力がばねの力より大きい範囲
 最大振幅がこの範囲にはいると静止する

図2.17 クーロン減衰のある自由振動の波形

第2章 1自由度系の振動

2.3 減衰自由振動

2.3.2 クーロン減衰自由振動

図2.17から、始は ($\dot{x} < 0$)

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = s \omega_n^2 \quad (2.41)$$

式(2.41)は、右辺がゼロでは無いので、非同次方程式になる。よって、特殊解が $x = s$ したがって、右辺ゼロの同次方程式の解と和すると、一般解が求まる。

$$x(t) = s + A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t \quad (2.42)$$

視察により
(直感)

ここで初期条件 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 = 0$ なので $A_1 = x_0 - s, B_1 = 0$ と決まる

$$x(t) = s + (x_0 - s) \cos \omega_n t \quad (2.43)$$

上式は次に $\dot{x} = 0$ となる時刻まで成立する。その時刻は上式を微分して

$$\dot{x}(t) = -(x_0 - s) \omega_n \sin \omega_n t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \pi / \omega_n$$

上の時刻を式(2.43)に代入すると

$$x(\pi / \omega_n) = s + (x_0 - s) \underbrace{\cos \pi}_{(-1)} = 2s - x_0$$

減衰の無い自由振動の
ときは $x(\pi / \omega_n) = -x_0$
振幅は $2s$ 減少する

第2章 1自由度系の振動

2.3 減衰自由振動

2.3.2 クーロン減衰自由振動

図2.17から、 $t = \pi / \omega_n$ をすぎると ($\dot{x} > 0$)

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = -s \omega_n^2 \quad (2.44)$$

式(2.44)も(2.41)と同様に解くことにするので、一般解は

$$x(t) = -s + A_2 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t \quad (2.45)$$

ただし、 $t = \pi / \omega_n$ で $x(\pi / \omega_n) = 2s - x_0, \dot{x}(\pi / \omega_n) = 0$ なので

$A_2 = x_0 - 3s, B_2 = 0$ と決まる

$$x(t) = -s + (x_0 - 3s) \cos \omega_n t \quad (2.46)$$

上式は次に $\dot{x} = 0$ となる時刻まで成立する。その時刻は上式を微分して

$$\dot{x}(t) = -(x_0 - 3s) \omega_n \sin \omega_n t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2\pi / \omega_n$$

$t = \pi / \omega_n$ を過ぎているので、次に条件を満足する時刻

$$x(2\pi / \omega_n) = -s + (x_0 - 3s) \cos 2\pi = x_0 - 4s \quad \text{さらに } 2s \text{ 減少した}$$

2.3 減衰自由振動

2.3.2 クーロン減衰自由振動

あとは、前述の計算を繰り返す

$$\begin{aligned}
 (\dot{x} < 0) \quad x(t) &= s + (x_0 - s) \cos \omega_n t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_n} \\
 (\dot{x} > 0) \quad x(t) &= -s + (x_0 - 3s) \cos \omega_n t & \frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_n} \\
 (\dot{x} < 0) \quad x(t) &= s + (x_0 - 5s) \cos \omega_n t & \frac{2\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{3\pi}{\omega_n} \\
 (\dot{x} > 0) \quad x(t) &= -s + (x_0 - 7s) \cos \omega_n t & \frac{3\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{4\pi}{\omega_n} \\
 & \vdots &
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

要するに、半周期 π / ω_n で振幅が $2s$ ずつ減少する

固有角振動数は、減衰の無いときの自由振動と同じ



2.3.1 クーロン減衰自由振動

例題2.9 図2.16の系において、質量 m がばね ($k = 20 \text{ kN/m}$) に取り付けられている。この質量に初期変位 $x_0 = 11 \text{ mm}$ を与えて静かに放すと、この質量が停止するまで何サイクルするか。また、質量が停止する位置はどこか。ただし、 $F = 15 \text{ N}$ の一定のクーロン摩擦力が作用すると仮定する。

(解) $2s = 2F/k = 1.5 \text{ mm}$ となるので、 $1/2$ サイクルするごとに
振幅が 1.5 mm 減衰する。 $s = 0.75 \text{ mm}$

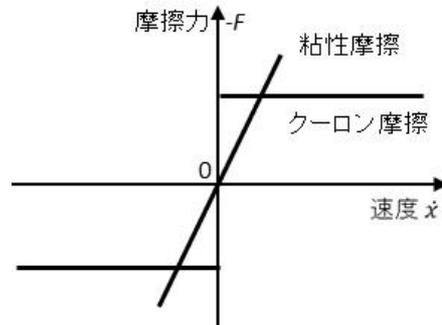
したがって、初期変位 11 mm を超えない $1/2$ サイクル数を n とすると

$$|11 - 1.5n| < 0.75 \quad \text{より} \quad 6.83 < n < 7.83$$

上式から $n = 7$ となり、3.5 サイクルとなる。

このときの振幅の極小値は -0.5 mm となり、図2.17からわかるように $x = \pm 0.75 \text{ mm}$ 内に入ってしまう。そのとき $\dot{x} = 0$ となるので、 x 軸の負側 $x = -0.5 \text{ mm}$ の位置で静止する。

2.3.2 クーロン減衰自由振動



粘性減衰は速度に比例

$$f = -c\dot{x}$$

速度の向きで力の向きも変化

$$\dot{x} > 0 \quad f < 0$$

$$\dot{x} < 0 \quad f > 0$$

クーロン減衰(乾性摩擦)は
速度には関係なく、垂直抗力に比例
運動の方向により向きは切り換わる

表2.2 粘性減衰とクーロン減衰の比較



2.3.2 クーロン減衰自由振動

表2.2 粘性減衰とクーロン減衰の特徴の比較

項目	粘性減衰	クーロン減衰
振幅の変化	隣接する振幅比が一定	隣接する振幅の差が一定
包絡線	指数関数	直線
半周期(極値間)	$\pi / \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ($0 < \zeta < 1$)	π / ω_n
振動の停止時刻	理論的には停止しない	極値が $\pm s$ 内に入った時点
振動の停止位置	0 に無限に漸近	$\pm s$ の位置での極値

