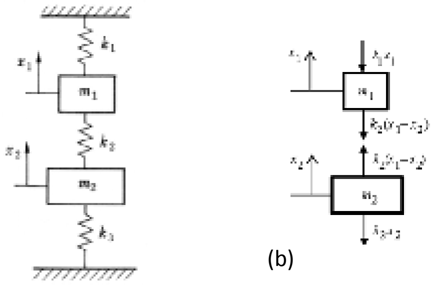
第3章　２自由度系の振動

3. 1 非減衰自由振動

3.1.1 並進(直線)振動系



(a)　　(b)

図3.1　２自由度ばねー質量系の(a)力学モデルと(b)自由物体線図

2自由度系とはどのようなものか？

考えて下さい
どのような物があるのか？
自由度とは？

3.1.1 並進(直線)振動系

運動方程式を作る（自由度の数だけ式ができる）

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2(x_1 - x_2) - k_3x_3 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

2番目の式は，次のようにも書ける（作用・反作用を考えるか，系統的に考えるか）

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_3$$

好みの問題だが，私は系統的に考えるほうを勧めます(3自由度以上への対応)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.2)$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

注）一般的な表記として上式のように表すと，1自由度系と同じ

自由振動の解

一般解（自由振動の解）を

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi)$$
$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi) \qquad (3.3)$$

A_1 , A_2 は質量m_1 , m_2の変位振幅である．式(3.3)を(3.2)に代入して整理すると

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.4)$$

この式を固有値問題という．式(3.4)を変形して

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.5)$$

これは，連立一次方程式で，右辺がゼロベクトルなので，当然，
自明解は$A_1 = A_2 = 0$ である．

→ でも必要なのは，**非自明解**

非自明解をもつためには，式(3.5)の係数行列の係数行列＝0となる必要がある

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.6)$$

式(3.5)を展開し整理する

$$m_1 m_2 \left[\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2} \right] = 0 \qquad (3.7)$$

上式を振動数方程式（特性方程式）という．ω^2に関する2次方程式を解く

$$\omega_{n1}^2, \omega_{n2}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) \mp \sqrt{ \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) + \frac{4k_2^2}{m_1 m_2} \omega^2 } \right] \qquad (3.8)$$

一般に， $\omega_{n1} < \omega_{n2}$

ω_{n1}　1次固有振動数（1次モード）

ω_{n2}　2次固有振動数（2次モード）

2つの固有角振動数があるので，

$\omega = \omega_{n1}$ のとき，の振動を1次振動モード，上添字(1)で表す

$$x_1^{(1)}(t) = A_1^{(1)} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1), \quad x_2^{(1)}(t) = A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1)$$

$\omega = \omega_{n2}$ のとき，の振動を2次振動モード，上添字(2)で表す

$$x_1^{(2)}(t) = A_1^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2), \quad x_2^{(2)}(t) = A_2^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2)$$

1次と2次の固有振動モードは，各自由度で独立しつつ混在して存在する

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = A_1^{(1)} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2) \\ x_2(t) &= x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) = A_2^{(1)} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

自由振動は，1次および2次の固有振動数の調和振動の重ね合わせで表せる

式(3.10)の自由振動を確定するために，以下の初期条件4つを用いるが，

$$x_1(0) = x_0,\ \dot{x}_1(0) = v_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ x_2(0) = v_{20}$$

未知数（決定すべき変数）は6こある ➡ $\boxed{A_1^{(1)},\ A_1^{(2)},\ A_2^{(1)},\ A_2^{(2)},\ \phi_1,\ \phi_2}$

無理です

各自由度の間の関係を利用

➡ 振動モード（固有モード）

$\omega = \omega_{n1}$ （1次振動モード）のとき，　固有値問題　式(3.4)に代入

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{k_1 + k_2 - m_1\omega_{n1}^2}{k_2} = \frac{k_2}{k_2 + k_3 - m_2\omega_{n1}^2} = \kappa_1 \quad (3.9a)$$

同位相
$\kappa_1 > 0$

式(3.4)は2行2列の連立一次方程式となるが，非自明解を求める条件から
式(3.4)の上下の式は同じ関係式に縮約される（上の式が第2項，下の式は第3項）.

$\omega = \omega_{n2}$ （2次振動モード）のとき，

$$\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{k_1 + k_2 - m_1\omega_{n2}^2}{k_2} = \frac{k_2}{k_2 + k_3 - m_2\omega_{n2}^2} = \kappa_2 \quad (3.9b)$$

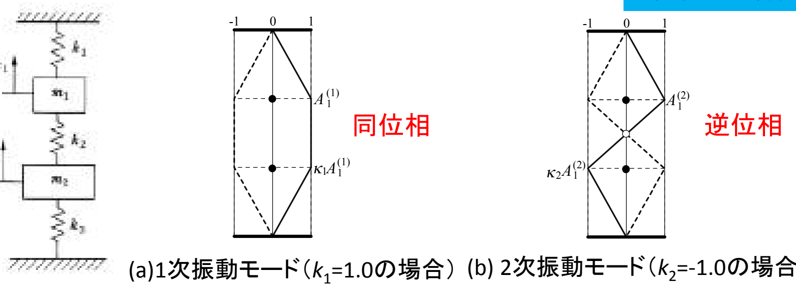
逆位相
$\kappa_2 < 0$

このように固有振動数において**振幅の相対比**は一意に定まる

OK!

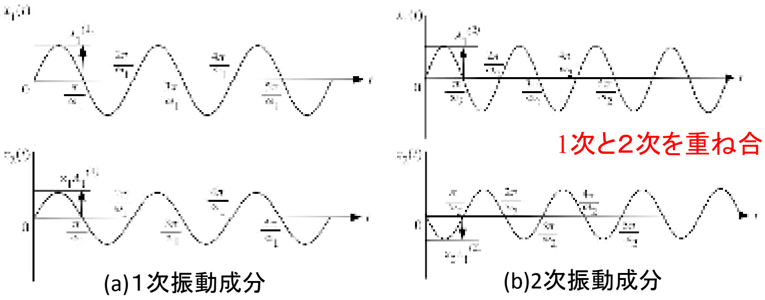
∴　決定すべき未知数は4こになる $\boxed{A_2^{(1)}(=\kappa_1 A_1^{(1)}),\ A_2^{(2)}(=\kappa_2 A_1^{(2)}),\ \phi_1,\ \phi_2}$

第2章　1自由度系の振動



(a)1次振動モード（k_1=1.0の場合）(b) 2次振動モード（k_2=-1.0の場合）

図3.3　2自由度ばね一質量系の2つの固有振動モード(m_1=m_2=m, k_1=k_2=kの場合)



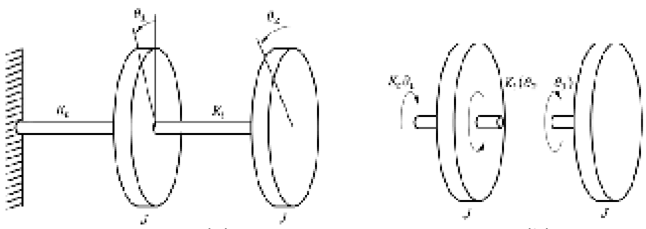
(a)1次振動成分　(b)2次振動成分

図3.2　2自由度ばね–質量系の(a)1次振動波形と(b)2次振動波形

第3章　2自由度系の振動

3.1.2 回転（ねじり）振動系

回転（ねじり）だけは恐れるに足りず



(a)　(b)

図3.4　2自由度回転系の(a)力学モデルと(b)自由物体線図

運動方程式は

$$J\ddot{\theta}_1 = -K_t\theta_1 - K_t(\theta_1 - \theta_2)$$
$$J\ddot{\theta}_2 = -K_t(\theta_2 - \theta_1) \qquad (3.13)$$

ベクトル・行列表示すると

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K_t & -K_t \\ -K_t & K_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.14)$$

3.1.2 回転(ねじり)振動系

一般解を

$$\theta_1(t) = \Theta_1 \sin(\omega t + \phi)$$
$$\theta_2(t) = \Theta_2 \sin(\omega t + \phi) \qquad (3.15)$$

運動方程式に代入して整理する(固有値問題)

$$\begin{bmatrix} 2K_t - J\omega^2 & -K_t \\ -K_t & K_t - J\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.16)$$

非自明解の導出のため，上式の係数行列の行列式を0とする(振動数方程式)

$$J^2 \left\{ \omega^4 - 3\left(\frac{K_t}{J}\right)\omega^2 + \left(\frac{K_t}{J}\right)^2 \right\} = 0$$

ω^2に関する2次方程式を解く(固有角振動数を得る)

$$\omega_{n1}^2 = \frac{(3-\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{K_t}{J}, \quad \omega_{n2}^2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{K_t}{J} \qquad (3.17)$$

注)本講義では2乗であることを明記してれば平方根を求めなくてもよい

➡ 振動モード(固有モード)

$\omega = \omega_{n1}$ (1次振動モード)のとき，固有値問題　式(3.16)に代入

$$\frac{\Theta_2^{(1)}}{\Theta_1^{(1)}} = \frac{2K_t - J\omega_{n1}^2}{K_t} = \frac{K_t}{K_t - J\omega_{n1}^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 = \kappa_1 \qquad (3.18a)$$

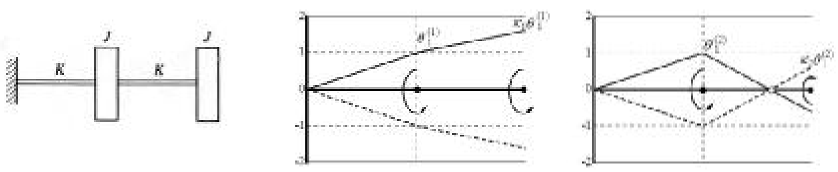
同位相
$\kappa_1 > 0$

実際に代入して計算すること

$\omega = \omega_{n2}$ (2次振動モード)のとき，

$$\frac{\Theta_2^{(2)}}{\Theta_1^{(2)}} = \frac{2K_t - J\omega_{n2}^2}{K_t} = \frac{K_t}{K_t - J\omega_{n2}^2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618 = \kappa_2 \qquad (3.18b)$$

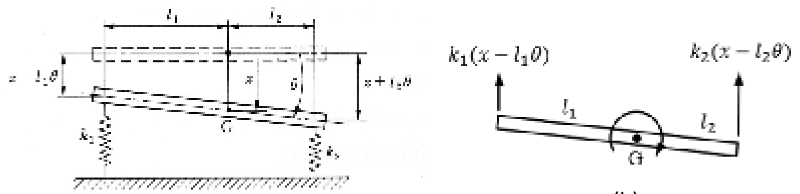
逆位相
$\kappa_2 < 0$



(a)1次振動モード (k_1=1.62)　(b)2次振動モード(k_2=-0.62)

図3.5　２自由度回転系のねじり固有振動モード

3.1.3 並進と回転の連成振動系　　**組み合わせは難しい？**



(a)　(b)

図3.6　上下運動と回転運動する(a) 剛体棒モデルと(b)自由物体線図

運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -k_1(x-l_1\theta)-k_2(x+l_2\theta)\\
J\ddot{\theta} &= k_1(x-l_1\theta)l_1-k_2(x+l_2\theta)l_2
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

ベクトル・行列表示すると

$$
\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -(k_1l_1-k_2l_2) \\ -(k_1l_1-k_2l_2) & k_1l_1^2+k_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{3.22}
$$

3.1.3 並進と回転の連成振動系

一般解を

$$
\begin{aligned}
x(t) &= X\sin(\omega t+\phi)\\
\theta(t) &= \Theta\sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

運動方程式に代入して整理する（固有値問題）

$$
\begin{bmatrix} k_1+k_2-m\omega^2 & -(k_1l_1-k_2l_2) \\ -(k_1l_1-k_2l_2) & k_1l_1^2+k_2l_2^2-J\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{3.24}
$$

非自明解の導出のため，上式の係数行列の行列式を0とする（振動数方程式）

$$
\begin{vmatrix} k_x-m\omega^2 & -k_{x\theta} \\ -k_{x\theta} & k_\theta-J\omega^2 \end{vmatrix}=0
\tag{3.25}
$$

$$
k_x=k_1+k_2,\quad k_\theta=k_1l_1^2+k_2l_2^2,\quad k_{x\theta}=k_1l_1-k_2l_2
$$

$$
mJ\left\{\omega^4-\left(\frac{k_x}{m}+\frac{k_\theta}{J}\right)\omega^2+\frac{k_xk_\theta-k_{x\theta}^2}{mJ}\right\}=0
\tag{3.26}
$$

3.1.3 並進と回転の連成振動系

ω²に関する2次方程式を解く(固有角振動数を得る)

$$\omega_{n1}^2,\ \omega_{n2}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_x}{m}+\frac{k_\theta}{J}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{k_x}{m}-\frac{k_\theta}{J}\right)^2 + \frac{4k_{x\theta}^2}{mJ}}\right] \tag{3.27}$$

$\omega = \omega_{n1}$ (1次振動モード)のとき，　固有値問題　式(3.24)に代入

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}} = \frac{k_{x\theta}}{k_x - m\omega_{n1}^2} = \frac{k_\theta - J\omega_{n1}^2}{k_{x\theta}} = \kappa_1 \tag{3.28a}$$

$\omega = \omega_{n2}$ (2次振動モード)のとき，

$$\frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}} = \frac{k_{x\theta}}{k_x - m\omega_{n2}^2} = \frac{k_\theta - J\omega_{n2}^2}{k_{x\theta}} = \kappa_2 \tag{3.28b}$$

$k_{x\theta} = k_1 l_1 - k_2 l_2 = 0$　のとき，1次モードと2次モードは互いに干渉せず独立になる
非連成振動

3.1 非減衰自由振動

例題3.1　図3.1の2自由度ばね-質量系において $m_1 = m_2 = m,\ k_1 = k_2 = k_3 = k$　とし，
初期条件が $x_1(0) = 1,\ \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$　のとき，
自由振動の解 $x_1(t),\ x_2(t)$ を求めよ．ただし，振幅の単位はcmとする．

(解)　運動方程式は

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

一般解は

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi)$$
$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi)$$

固有値問題は

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

係数行列の行列式を0として，振動数方程式(特性方程式)を求める

$$m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 3k^2 = 0$$

固有角振動数は　$(m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 3k) = 0 \quad \therefore\ \omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \ \omega_{n2} = \sqrt{\frac{3k}{m}}\ (rad/s)$

3.1 非減衰自由振動

例題3.1 （解）

振動モードは

1次の時 ω_{n1}　　$\dfrac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = 1 = \kappa_1$

2次の時 ω_{n2}　　$\dfrac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -1 = \kappa_2$

パラメータが簡略されれば，上記の計算は非常に簡単にできる．式(3.8)は暗記しないこと

自由振動の解は

$$x_1(t) = A_1^{(1)} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = A_1^{(1)} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1) - A_1^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2)$$

与えられた初期条件 $x_1(0) = 1,\ \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ より

$$x_1(0) = A_1^{(1)} \sin\phi_1 + A_1^{(2)} \sin\phi_2 = 1 \quad ①$$
$$x_2(0) = A_1^{(1)} \sin\phi_1 - A_1^{(2)} \sin\phi_2 = 0 \quad ②$$
$$\dot{x}_1(0) = A_1^{(1)} \omega_{n1} \sin\phi_1 + A_1^{(2)} \omega_{n2} \sin\phi_2 = 0 \quad ③$$
$$\dot{x}_2(0) = A_1^{(1)} \omega_{n1} \sin\phi_1 - A_1^{(2)} \omega_{n2} \sin\phi_2 = 0 \quad ④$$

3.1 非減衰自由振動

例題3.1 （解）

③＋④として　$2A_1^{(1)} \omega_{n1} \sin\phi_1 = 0$　ただし，$A_1^{(1)} \neq 0$　$\omega_{n1} \neq 0$　とすれば

$\sin\phi_1 = 0$　よって，　$\phi_1 = \pi/2$

③－④として　$2A_1^{(2)} \omega_{n2} \sin\phi_2 = 0$　ただし，$A_1^{(2)} \neq 0$　$\omega_{n2} \neq 0$　とすれば

$\sin\phi_2 = 0$　よって，　$\phi_2 = \pi/2$

以上より，①，②は

$$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} = 1 \quad ⑤$$
$$A_1^{(1)} - A_1^{(2)} = 0 \quad ⑥$$

⑤＋⑥として　$2A_1^{(1)} = 1$　→　$A_1^{(1)} = 0.5$

⑤－⑥として　$2A_1^{(2)} = 1$　→　$A_1^{(2)} = 0.5$

これで，自由振動の解が決まる
（非常に複雑な初期条件の場合は，手計算では解けない場合もある）

3.1 非減衰自由振動

例題3.2　図3.6に示す剛体棒について，固有角振動数と振動モードを求めよ.
ただし，棒の質量 $m=1600kg$，棒の重心Gまわりの慣性モーメント$J=2500kg\,m^2$,
棒の重心から左端までの距離 $l_1=1.4m$，棒の重心から右端までの距離 $l_2=1.6m$ ，
棒の両端における等価ばね剛性 $k_1=35kN/m,\ k_2=41kN/m$.

（解）

この問題は，パラメータの共通化がなされてないので，
もとの運動方程式(3.22)を扱う

振動数方程式

$$\begin{vmatrix} k_x-m\omega^2 & -k_{x\theta} \\ -k_{x\theta} & k_\theta-J\omega^2 \end{vmatrix}=0 \qquad mJ\left\{\omega^4-\left(\frac{k_x}{m}+\frac{k_\theta}{J}\right)\omega^2+\frac{k_xk_\theta-k_{x\theta}^2}{mJ}\right\}=0$$

$$k_x=k_1+k_2,\quad k_\theta=k_1l_1^2+k_2l_2^2,\quad k_{x\theta}=k_1l_1-k_2l_2$$

固有角振動数

$$\omega_{n1}^2,\ \omega_{n2}^2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_x}{m}+\frac{k_\theta}{J}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{k_x}{m}-\frac{k_\theta}{J}\right)^2+\frac{4k_{x\theta}^2}{mJ}}\right]$$

$$k_x/m=(k_1+k_2)/m=47.5(s^{-2}) \qquad k_\theta/J=(k_1l_1^2+k_2l_2^2)/J=69.4(s^{-2})$$

$$k_{x\theta}^2/mJ=(k_1l_1-k_2l_2)/mJ=68.9(s^{-2})$$

ケアレスミスを防ぐには，最後に値を代入すべきである.

3.1 非減衰自由振動

例題3.2　**（解）**

固有角振動数は

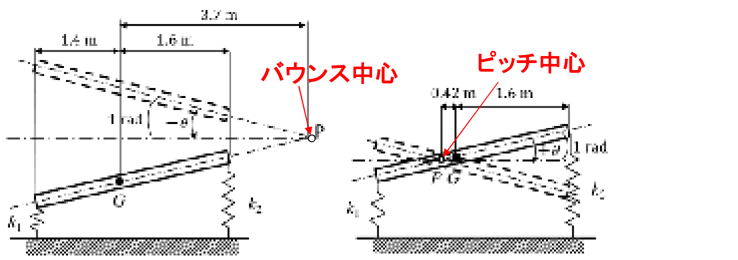
1次モード　$\omega_{n1}=6.7\,rad/s(f_1=1.06Hz)$

2次モード　$\omega_{n2}=8.5\,rad/s(f_2=1.35Hz)$

振動モード（固有モード）は

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}}=-3.7m/rad=-6.45cm/\deg$$

$$\frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}}=0.42m/rad=0.73cm/\deg$$



(a)1次振動モード（並進モードが優勢）　(b)2次振動モード（回転モードが優勢）

図3.7　剛体棒の1次および2次固有振動モード