第3章　２自由度系の振動

３．２ 強制振動

3.2.1 非減衰強制振動ー動吸振器の理論

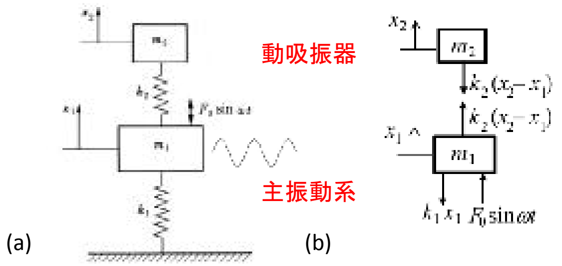


図3.9 ２自由度ばねー質量系の(a)カ学モデルと(b)自由物体線図

先ずは，運動方程式(主振動系，動吸振器それぞれ1自由度系が結合して2自由度系)

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_0 \sin\omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \qquad (3.31)$$

3.2.1 非減衰強制振動

式(3.31)の上下式の両辺をそれぞれ m_1, m_2 で除して整理

$$\ddot{x}_1 + (\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2)x_1 - \omega_{12}^2 x_2 = \frac{F_0}{m_1}\sin\omega t$$
$$\ddot{x}_2 - \omega_{22}^2 x_1 + \omega_{22}^2 x_2 = 0 \qquad (3.32)$$

ただし

$\omega_{11}^2 = k_1 / m_1$ ➡主振動系のみの固有角振動数

$\omega_{12}^2 = k_2 / m_1$

$\omega_{22}^2 = k_2 / m_2$ ➡ 動吸振器のみの固有角振動数

2自由度系として考えた固有角振動数は，全体の振動数方程式を使って求める
互いに影響しあう

減衰が無く，サイン関数のみによる調和励振を考慮して，強制振動の解(特殊解)は，

$$x_1(t) = A_1 \sin\omega t$$
$$x_2(t) = A_2 \sin\omega t \qquad (3.33)$$

特殊解を代入して整理

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2+\omega_{11}^2+\omega_{12}^2) & -\omega_{12}^2 \\ -\omega_{22}^2 & (-\omega^2+\omega_{22}^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_0/m_1\\0\end{Bmatrix} \qquad (3.34)$$

これは，単に A_1 と A_2 の連立一次方程式なので，(普通に解く)

ここでは，クラメルの公式から　　　　　　　　自由振動より簡単！

$$A_1=\frac{\begin{bmatrix} F_0/m_1 & -\omega_{12}^2 \\ 0 & (-\omega^2+\omega_{22}^2)\end{bmatrix}}{\Delta}=\frac{\{1-(\omega/\omega_{22})^2\}X_{st}}{D}$$

$$A_2=\frac{\begin{bmatrix} (-\omega^2+\omega_{11}^2+\omega_{12}^2) & F_0/m_1 \\ -\omega_{22}^2 & 0\end{bmatrix}}{\Delta}=\frac{X_{st}}{D} \qquad (3.35)$$

固有振動数は
Δ=0を考えれば
求められる

ただし　　Δは式(3.34)の係数行列の行列式

$$D=\{1-(\omega/\omega_{11})^2\}\{1-(\omega/\omega_{22})^2\}-\mu(\omega/\omega_{11})^2=\Delta/(\omega_{11}^2\,\omega_{22}^2)$$

質量比　$\mu=m_2/m_1$　　　静変位　$X_{st}=F_0/k_1$

式(3.35)から変位振幅倍率の絶対値を振動数比に対してプロットする

$M_1=|A_1|/X_{st},\ M_2=|A_2|/X_{st}$　　(ω/ω_{22})

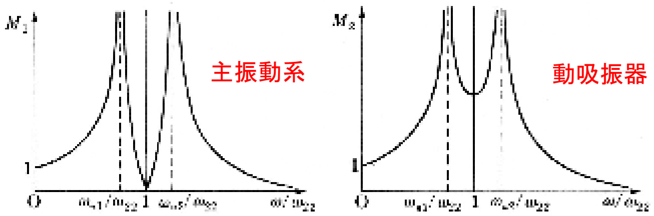


図3.10　(a)質量m_1と(b)質量m_2の振幅倍率曲線

上のグラフからわかること:

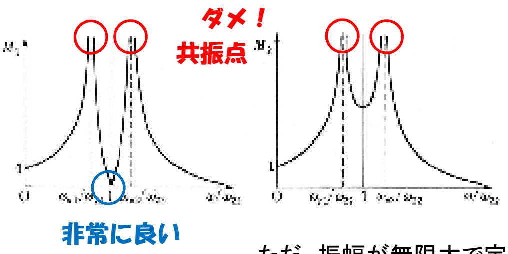
$\omega/\omega_{22}=1$ において，M_1=0 になる(主振動系の振幅が0)

$\omega/\omega_{22}=1$ というのは，外力の励振振動数に動吸振器の固有角振動数を一致させるということ

$\omega/\omega_{22}=1$ における，M_2 の振幅は質量比により変化する

主振動系と動吸振器の位相関係についても考える

グラフを見てわかるように減衰が無い動吸振器には問題がある



ただ、振幅が無限大で定常になるのは
少し時間がかかる(2.5節参照)

使いようによっては非常に良いのだが、特性の変化や効果のある振動数の幅を
広げるためには動吸振器に減衰要素を加える（粘性動吸振器）

動吸振器の理論は、原理的には強制振動に対するものである．
ただし，自由振動にも効くので，しばしば用いられている（解釈を誤解されることがある）．

3.2.1 非減衰強制振動　動吸振器の理論

例題3.3

図3.11は回転機械に有効な振り子式動吸振器である．これは回転軸に平行な支軸をもつ振り子であって，軸の回転とともに回転面内で振子運動をする．振子の長さrと回転軸と振子の支軸間の距離Rを調整することにより，回転軸のねじれ振動が除去できる．その原理を説明せよ．

（解）　図3.11中の記号の定義は，教科書を参照のこと

重要なのは，回転体の角速度ωに加えて
ねじり振動θが発生すること

αとθは微小なので，接線方向の力は

$$ml\omega^2 \sin\alpha \approx ml\omega^2\alpha$$

三角形OAmについて正弦定理から

$$\frac{\sin(\pi-\phi)}{l} = \frac{\sin\alpha}{R} \Rightarrow l\alpha = R\phi$$

接線方向の力を書き換えると

$$ml\omega^2\alpha = mR\omega^2\phi \qquad (1)$$

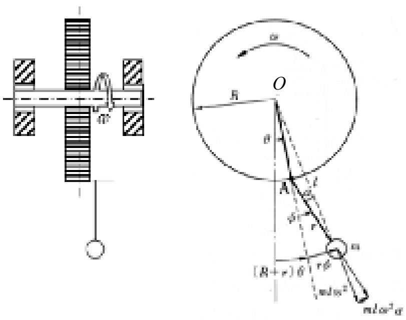


図3.11　振子式動吸振器の側面と正面

3.2.1 非減衰強制振動　動吸振器の理論

例題3.3　（解）　　振り子質量mの運動方程式は

$$m\{(R+r)\ddot{\theta}+r\ddot{\phi}\}=-ml\omega^2\alpha(=-mR\omega^2\phi) \qquad (2)$$

式(2)を変形して

$$\ddot{\phi}+\omega^2(R/r)\phi=-(1+R/r)\ddot{\theta} \qquad (3)$$

ここで，回転軸のねじれ振動の角変位θが軸の回転角速度ωの整数(n)倍の調和関数として

$\theta(t)=\Theta\sin n\omega t$　で与えられると仮定する．振り子のねじれ角を　$\phi(t)=\Phi\sin n\omega t$

とおいて，式(3)に代入すると

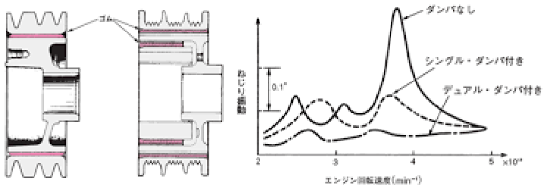
$$\frac{\Phi}{\Theta}=\frac{R/r-n^2}{n^2(1+R/r)} \qquad (4)$$

となる．ここで，

$R/r=n^2(n=\sqrt{R/r})$

とすれば，式(4)から $\Theta=0$ となり，

回転軸のねじり振動は
完全に除去される．



3.2.2 減衰強制振動ー粘性動吸振器の理論

付加

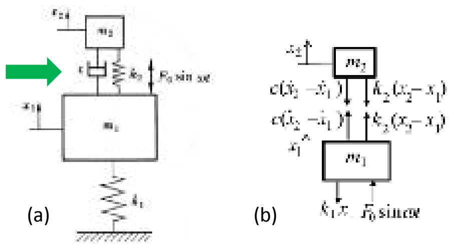


図3.12　2自由度ばねー質量ーダッシュポット系の(a)力学モデルと(b)自由物体線図

運動方程式は

$$m_1\ddot{x}_1=-c(\dot{x}_1-\dot{x}_2)-k_1x_1-k_2(x_1-x_2)+F_0\sin\omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2=-c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k_2(x_2-x_1) \qquad (3.38)$$

さらに

$$\ddot{x}_1+2\mu\zeta\omega_{22}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2)x_1-\omega_{12}^2x_2=\frac{F_0}{m_1}\sin\omega t$$
$$\ddot{x}_2+2\zeta\omega_{22}(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+\omega_{22}^2(x_2-x_2)=0 \qquad (3.39)$$

ただし　$\mu=m_2/m_1,\quad \zeta=c/2\sqrt{m_2k_2}$　　その他は式(3.32)と同様

3.2.2 減衰強制振動ー粘性動吸振器の理論

複素数表示　$F_0 \sin \omega t = F_0 e^{j\omega t}$　とおくと，定常振動（強制振動）の解も

$$x_1(t) = A_1 e^{j(\omega t - \phi_1)} = A_1 e^{-j\phi_1} \cdot e^{j\omega t} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t}$$
$$x_2(t) = A_2 e^{j(\omega t - \phi_2)} = A_2 e^{-j\phi_2} \cdot e^{j\omega t} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \quad (3.40)$$

SinとCosを使うより慣れると便利！

代入して整理すると

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 + \omega_{11}^2 + \omega_{12}^2) + 2j\mu\zeta\omega_{22}\omega & -\omega_{12}^2 - 2j\mu\zeta\omega_{22}\omega \\ -\omega_{22}^2 - 2j\zeta\omega_{22}\omega & (-\omega^2 + \omega_{22}^2) + 2j\zeta\omega_{22}\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 / m_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

連立方程式をといて，複素振幅 $\tilde{A}_1$ および $\tilde{A}_2$を求める

$$\tilde{A}_1 = \frac{\{1 - (\omega/\omega_{22})^2 + 2j\zeta(\omega/\omega_{22})\} X_{st}}{D}$$
$$\tilde{A}_2 = \frac{\{1 + 2j\zeta(\omega/\omega_{22})\} X_{st}}{D} \quad (3.42)$$

$$D = \{1 - (\omega/\omega_{11})^2\}\{1 - (\omega/\omega_{22})^2\} - \mu(\omega/\omega_{11})^2 + 2j\zeta(\omega/\omega_{22})\{1 - (1+\mu)(\omega/\omega_{11})^2\}$$
$$= \Delta / (\omega_{11}^2 \omega_{22}^2) \qquad X_{st} = F_0 / k_1$$

第3章　2自由度系の振動

3.2.2 減衰強制振動ー粘性動吸振器の理論

振幅倍率は

$$\frac{A_1}{X_{st}} = \frac{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}^2}}{\sqrt{\left[\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\} - \mu\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2 + \left[\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}\left\{1 - (1+\mu)\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\right]^2}}$$

$$\frac{A_2}{X_{st}} = \frac{\sqrt{1 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}^2}}{\sqrt{\left[\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\} - \mu\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2 + \left[\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}\left\{1 - (1+\mu)\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\right]^2}} \quad (3.43)$$

位相遅れ角は

$$\tan\phi_1 = \frac{2\zeta\mu\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^3}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}\left[\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\} - \mu\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}^2\left\{1 - (1+\mu)\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}}$$

$$\tan\phi_2 = \frac{2\zeta\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^3}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\} - \mu\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}^2\left\{1 - (1+\mu)\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}} \quad (3.44)$$

p.93のように地道にやって下さい　　There are no shortcuts in learning.

3.2.2 減衰強制振動－粘性動吸振器の理論

振幅倍率曲線は

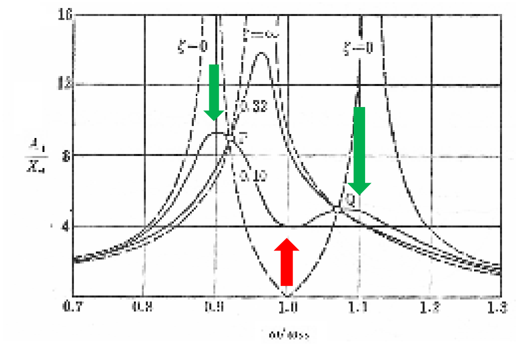


図3.13　質量m_1の振幅倍率曲線($\omega_{11}=\omega_{22}$, $\mu=1/20$)

点Pおよび点Qは減衰に関わらず必ず通るので，
定点と言う

➡ 粘性動吸振器　　ピンポイントでの性能を狙わずに，平均的な性能を確保

3.3 粘性動吸振器

＊Jacob Pieter Den Hartog

粘性動吸振器の最適設計（Den Hartog(デンハルトック)の設計方法）

定点理論：定点PとQの高さを等しく，この点で振幅倍率曲線が極大となるように
ω_{11}/ω_{22} および ζ を選べばよい

上述の条件を数式で実現すると

式(3.43)の上式で，$\zeta=0$ と $\zeta=\infty$ として，高さが等しい条件から

$$\frac{1-(\omega/\omega_{22})^2}{\{1-(\omega/\omega_{11})^2\}\{1-(\omega/\omega_{22})^2\}-\mu(\omega/\omega_{11})^2}=-\frac{1}{1-(1+\mu)(\omega/\omega_{11})^2} \qquad (3.46)$$

右辺の符号（マイナス）は，両条件での位相に注意して決定する必要がある.

$(\omega/\omega_{11})^2$　の2次方程式を解くと

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2=\frac{1+\mu+(\omega_{11}/\omega_{22})^2\pm\sqrt{(1+\mu)^2+(\omega_{11}/\omega_{22})^4-2(\omega_{11}/\omega_{22})^2}}{(2+\mu)(\omega_{11}/\omega_{22})^2} \qquad (3.47)$$

この2根は点P(－)と点Q(＋)に対応する.

3.3 粘性動吸振器

前述の点Pおよび点Qを $(\omega/\omega_{11})_P^2$ および $(\omega/\omega_{11})_Q^2$ として，
点Pと点Q の振幅倍率の高さを等しくする

点Pと点Qの位相が180°異なることに注意すると（式(3.46)で $\zeta=\infty$ の右辺だけを考える）

$$\frac{1}{1-(1+\mu)(\omega/\omega_{11})_P^2} = -\frac{1}{1-(1+\mu)(\omega/\omega_{11})_Q^2} \qquad (3.48)$$

式(3.48)を整理して

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)_P^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)_Q^2 = \frac{2}{1+\mu}$$

式(3.47)の2根の和をとると

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)_P^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)_Q^2 = \frac{2\{1+\mu+(\omega_{11}/\omega_{22})^2\}}{(2+\mu)(\omega_{11}/\omega_{22})^2}$$

上の2式で，右辺は等しいことから

点Pと点Q の振幅倍率の大きさを等しくする

$$\boxed{\frac{\omega_{11}}{\omega_{22}} = 1+\mu \qquad \text{（最適調整条件）}} \qquad (3.49)$$

3.3 粘性動吸振器

次に，点Pと点Qで振幅倍率が極大値となるように減衰比を決定する

式(3.49)を式(3.47)に代入すると，点P，Qでの振動数比は

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)_P^2, \left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)_Q^2 = \frac{1}{1+\mu}\left\{1\mp\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right\} \qquad (3.50)$$

次に，式(3.50)を式(3.48)に代入して，点PとQの高さを求めると

$$\frac{A_1}{X_{st}} = \frac{1}{1-(1+\mu)(\omega/\omega_{11})_P^2} = -\frac{1}{1-(1+\mu)(\omega/\omega_{11})_Q^2} = \sqrt{1+\frac{2}{\mu}} \qquad (3.51)$$

振幅倍率の極大をもとめるには

$$\frac{\partial}{\partial(\omega/\omega_{22})^2}\left(\frac{A_1}{X_{st}}\right) = 0 \qquad (3.52)$$

ただし，点Pと点Q で同時に極大となる減衰比 ζ は存在しない

点Pおよび点Qで，各々極大となる減衰比を求める ζ_p，ζ_Q

3.3 粘性動吸振器

点Pおよび点Qで，各々極大となる減衰比は

$$\zeta_P^2,\ \zeta_Q^2 = \frac{\mu}{8(1+\mu)}\left\{3 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right\} \tag{3.53}$$

この2つの減衰比の平均値をとる．ただし，ここでの計算式は以下のようにする

$$\boxed{\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{\zeta_P^2+\zeta_Q^2}{2}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}} \tag{3.54}$$

点Pと点Qを振幅倍率の極大値（近似）とする

注意）　「粘性動吸振器の最適減衰比」

動吸振器の減衰比の定義による違い

式(3.54)での定義

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m_2 k_2}} = \frac{c}{2m_2\omega_{22}}$$

別の定義（しばしば見られる）

$$\bar{\zeta} = \frac{c}{2m_2\omega_{11}} \qquad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{1+\mu}$$

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}}$$