第1章　機械振動の基礎

1．1 振動とは

大きくなったり
小さくなったり
変動する.

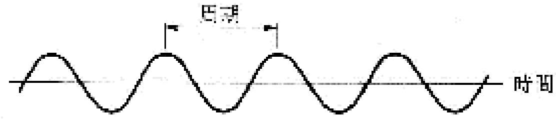


図1．1 正弦波状の規則振動（機械振動）

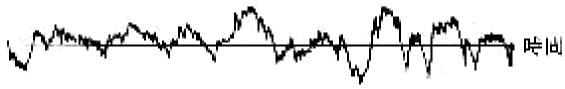


図1．2 不規則振動（地震）

身の回りの振動しそうなものを考えて下さい．　スマホ，携帯電話のバイブはどっち？

とりあえず，機械に関連する振動だけに限定しましょう → 規則正しく動く

何で振動しない方がよいの？　破壊，疲労，不快感，加工精度低下・・・

落語の3大噺のようですが．　エコ，環境 → 軽量化→ 振動

設計段階でなんとかしたい!!　堂々巡り 世の中に振動のネタは尽きない

1.1.1 振動の種類

表1.1 振動系・振動の分類

1．自由度による分類	集中定数系（1自由度系や多自由度系など），分布定数系（連続体）
2．振動要素の線形性による分類	線形振動，非線形振動
3．振動要素の変化による分類	定係数系，時変係数系（パラメータ励振系）
4．減衰の有無による分類	非減衰振動，減衰振動
5．外力の有無による分類	自由振動，強制振動，自励振動
6．外力の波形による分類	調和外力，一般の周期外力，一般の無周期外力（ステップ力，インパルス力，不規則外力など）
7．振動波形による分類	定常振動，非定常（過渡）振動
	規則（周期）振動，不規則（非周期）振動

キーワード:　**自由振動**　**強制振動**　**自励振動**　⇦　**励振力の違い**

定常振動 ⇔ 過渡振動　**規則振動（周期振動）⇔ 不規則振動（非周期振動）**

固有振動数　**共振現象**

1.1.2 振動の単位

国際単位系

(Systém International d'Unités:SI)

1960年　第10回国際度量衡総会

1972年　日本工業規格（JIS）

重力加速度

$g=9.80655\ m/s^2$

$g=9.81\ m/s^2$

表1.2　本書で使用される基本単位

物理量	名　称	記　号	組立単位
時　間	秒	s	
長　さ	メートル	m	
質　量	キログラム	kg	
角　度（平面角）	ラジアン	rad(-)*	
面　積	平方メートル	m^2	
体　積	立方メートル	m^3	
速　度	メートル毎秒	m/s	
角速度	ラジアン毎秒	rad/s	
加速度	メートル毎秒毎秒	m/s^2	
角加速度	ラジアン毎秒毎秒	rad/s^2	
質量密度	キログラム毎立方メートル	kg/m^3	
運動量	キログラム・メートル毎秒	kg・m/s	
角運動量	キログラム・平方メートル毎秒	kg・m^2/s	
慣性モーメント	キログラム・平方メートル	kg・m^2	
力	ニュートン	N	kg・m/ s^2
力　積	ニュートン・秒	N・s	kg・m/ s
力のモーメント，トルク	ニュートン・メートル	N・m	kg・m^2/ s^2
応力，圧力	パスカル	Pa	N/m^2
エネルギ，仕　事	ジュール	J	N・m
動　力，仕事率	ワット	W	N・m/s
回転数	回毎秒，回毎分	1/s, rpm	
振動数，周波数	ヘルツ	Hz	1/s
角（円）振動数	ラジアン毎秒	rad/s	
周　期	秒	s	

1.2 調和振動

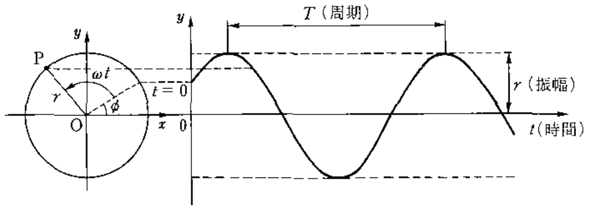


図1.3　調和振動例

$$x(t)=r\cos(\omega t+\phi),\ \ y(y)=r\sin(\omega t+\phi) \qquad (1.1)$$

調和振動（単振動）

$\boldsymbol{r}$　：振幅

ω　：角(円)振動数　　$\omega=2\pi f$　　f　:振動数

$\omega t+\phi$　：位相角　　$\phi>0$　位相進み　　$\phi<0$　位相遅れ

ϕ　：初期位相角

T　：周期　　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{1}{f}$

1.2 調和振動

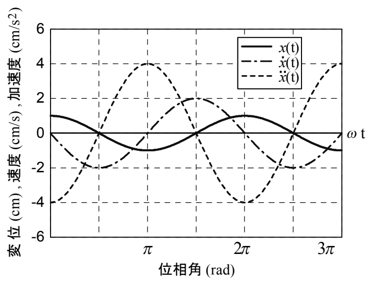


図1.4　変位，速度，加速度(r=1cm, ω=2rad/s, ϕ=0)

変位： $x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$ (1.1)

速度： $\dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t + \phi) = r\omega\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$ (1.2)

加速度： $\ddot{x}(t) = -r\omega^2\cos(\omega t + \phi) = r\omega^2\cos(\omega t + \phi + \pi)$ (1.3)

1.2.2　振動の合成

(1) 同一方向にあり，同一の角振動数で，異なる振幅と初期位相角をもつ2つの調和振動の合成：

$$x_1(t) = r_1\cos(\omega t + \phi_1),\ \ x_2(t) = r_2\cos(\omega t + \phi_2)$$

加法定理より

$$x_1(t) + x_2(t) = (r_1\cos\phi_1 + r_2\cos\phi_2)\cos\omega t - (r_1\sin\phi_1 + r_2\sin\phi_2)\sin\omega t$$

ここで，以下のようにおく

$$r\cos\phi = r_1\cos\phi_1 + r_2\cos\phi_2,\quad r\sin\phi = r_1\sin\phi_1 + r_2\sin\phi_2$$

三角関数の合成公式より

$$x_1(t) + x_2(t) = r\cos(\omega t + \phi) \tag{1.5}$$

振幅と初期位相角は

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{r_1\sin\phi_1 + r_2\sin\phi_2}{r_1\cos\phi_1 + r_2\sin\phi_2} \tag{1.6}$$

1.2.2　振動の合成

(2) 同一方向にあり，異なる角振動数，振幅，初期位相角をもつ2つの調和振動の合成：

$$x_1(t)=r_1\cos(\omega_1 t+\phi_1),\ \ x_2(t)=r_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

合成すると

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=r_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+r_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$=\frac{1}{2}(r_1+r_2)\{\cos(\omega_1 t+\phi_1)+\cos(\omega_2 t+\phi_2)\}+\frac{1}{2}(r_1-r_2)\{\cos(\omega_1 t+\phi_1)-\cos(\omega_2 t+\phi_2)\}$$

和および差の積への公式

$$x(t)=(r_1+r_2)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$

$$-(r_1-r_2)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$

三角関数の合成公式より

$$x(t)=r\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}+\psi\right)\qquad(1.7)$$

振幅と初期位相角は

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\{(\omega_1-\omega_2)t+\phi_1-\phi_2\}}$$

$$\tan\psi=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\tan\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\qquad(1.8)$$

1.2.2　振動の合成（うなり現象）

合成すると　$x(t)=r\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}+\psi\right)$　(1.7)

$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\{(\omega_1-\omega_2)t+\phi_1-\phi_2\}}$　　$\tan\psi=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\tan\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$　(1.8)

$\omega_1\neq\omega_2$ のときは振幅rと位相角ψは時間と共に変化する

r は $|r_1-r_2|$ から r_1+r_2 まで，ψ は $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで変化する

$r_1=r_2$　および　$\phi_1=\phi_2=0\ (\psi=0)$　のときは

$$x(t)=\left[2r_1\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right]\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\qquad(1.9)$$

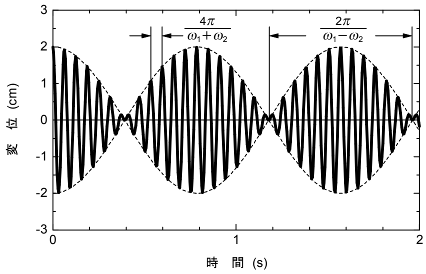


図1.5　うなり現象例（r_1=1cm, ω_1=104 rad, ω_2=96 radの場合）

第1章　機械振動の基礎

1.2　調和振動

例題1.1

$x(t) = 5\sin(\pi t/6 + \pi/3)$ の調和振動において，$t = 3s$ での変位 x，速度 $\dot{x}$，加速度 $\ddot{x}$ の値を求めよ．ただし，振幅の単位はcmとする．

（解）

$$\dot{x}(t) = 5(\pi/6)\cos(\pi t/6 + \pi/3)$$

$$\ddot{x}(t) = -5(\pi/6)^2\sin(\pi t/6 + \pi/3)$$

変位　$x(3) = 5\sin(\pi/2 + \pi/3) = 5\sin(5\pi/6) = 2.5cm$

速度　$\dot{x}(3) = 5(5\pi/6)\cos(\pi/2 + \pi/3) = -2.27cm/s$

加速度　$\ddot{x}(3) = -5(5\pi/6)^2\sin(\pi/2 + \pi/3) = -0.69cm/s^2$

第1章　機械振動の基礎

1.2　調和振動

例題1.2

同一の角振動数をもつ2つの調和振動

$$x_1(t) = 5\sin\omega t \qquad x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/3)$$

の合成関数を求めよ．ただし，振幅の単位はcmとする．

（解）

前者　の調和振動を　$\sin\omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$　と変形後，式(1.6)を用いて

$$r = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \bullet 6 \bullet 3\cos(-5\pi/6)} = 2.83$$

$$\tan\phi = \frac{5\sin(-\pi/2) + 3\sin(\pi/3)}{5\cos(-\pi/2) + 3\cos(\pi/3)} = -1.60$$

ただし　$\phi = \tan^{-1}(-1.60) = -1.01\ rad$

よって　$x(t) = 2.83\cos(\omega t - 1.01)\quad cm$

1.2　調和振動

例題1.3　角振動数の異なる2つの調和振動

$$x_1(t) = 10\cos 10t \qquad x_2(t) = 5\cos 8t$$

の合成振動の最大値および最小値，うなりの周期を求めよ．ただし，振幅の単位はcmとする．

（解）　式(1.8)より

最大振幅

$$r_{\max} = r_1 + r_2 = 10 + 5 = 15$$

最小振幅

$$r_{\min} = r_1 - r_2 = 10 - 5 = 5$$

うなりの周期

$$T = \frac{2\pi}{|(\omega_1 - \omega_2)|} = \frac{2\pi}{|10-8|} = \pi = 3.14\,s$$

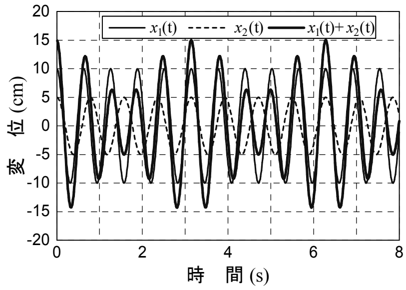


図1．８　うなり(beat)

1.2.3　調和振動の複素数表示

この考え方になれれば扱いが楽になる（はず）

$\mathcal{X}$(実数)-$\mathcal{Y}$(虚数)平面を複素平面と考える．

オイラーの公式（必ず暗記）

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

ただし　$j = \sqrt{-1}\ or\ (j^2 = -1)$　(1.11)

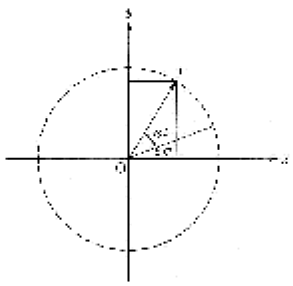


図1.9　調和振動のベクトル表示

$$\boldsymbol{r}(t) = r\cos(\omega t + \phi) + jr\sin(\omega t + \phi) \quad (1.12)$$

$$x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$$
$$y(t) = r\sin(\omega t + \phi) \quad (1.13)$$

調和振動を回転ベクトルを用いてあらわす

$$\boldsymbol{r}(t) = r\,e^{j(\omega t + \phi)} \quad (1.10)$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \underline{r\,e^{j\phi}} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\tilde{r}} \cdot e^{j\omega t}$$

複素振幅

第1章　機械振動の基礎

1.2.3 調和振動の複素数表示

変位　$\boldsymbol{r}(t) = r\,e^{j(\omega t+\phi)}$

速度　$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (j\omega) r\,e^{j(\omega t+\phi)} = \omega r e^{j(\omega t+\phi+\pi/2)}$

加速度　$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (j\omega)^2 r\,e^{j(\omega t+\phi)} = -\omega^2 r\,e^{j(\omega t+\phi)} = \omega^2 r\,e^{j(\omega t+\phi+\pi)}$

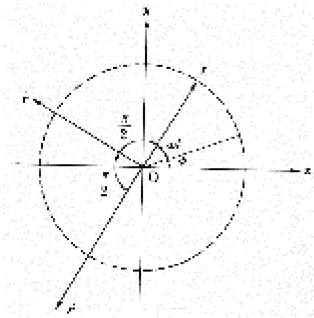


図1.10　変位，速度，加速度のベクトル表示

第1章　機械振動の基礎

1.2 調和振動

例題1.4

2つの複素ベクトル

$$\boldsymbol{r}_1(t) = 5e^{j(\omega t+\pi/6)} \qquad \boldsymbol{r}_2(t) = 3e^{j(\omega t+\pi/3)}$$

を合成して極形式で表示せよ．

（解）

$$\boldsymbol{r}(t) = r_1(t) + r_2(t) = (5e^{\pi/6\cdot j} + 3e^{\pi/3\cdot j})\,e^{j\omega t} = re^{j\phi}\cdot e^{j\omega t}$$

とおけるので，オイラーの公式により，複素振幅部を

実部　$r\cos\phi = 5\cos(\pi/5) + 3\cos(\pi/3) = 5.83$

虚部　$r\sin\phi = 5\sin(\pi/5) + 3\sin(\pi/3) = 5.10$

よって．振幅と初期位相角は次のようになる

$$r = \sqrt{5.83^2 + 5.10^2} = 7.75 \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{5.10}{5.83} = 0.719\ rad$$

したがって，　$\boldsymbol{r}(t) = 7.75\,e^{j(\omega t+0.719)}$　　注意：電卓の使い方

1.3 フーリエ級数と調和解析

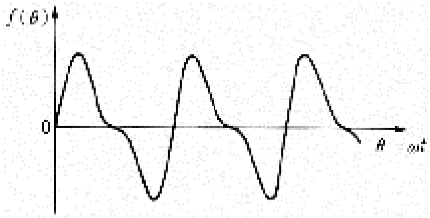


図1.11　周期運動

式(1.18)は，
無限個の正弦波と余弦波の
大きさを自由に変えられ，
周期も変えられるという意味
むしろ周期さえあれば
表せない関数は無い（はず）

フーリエ級数（周期関数は以下の正弦関数および余弦関数で表せる）

$$
\begin{aligned}
f(\omega t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_n \cos n\omega t + \cdots \\
&\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_n \sin n\omega t + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

1.3 フーリエ級数と調和解析

調和解析（フーリエ解析）

任意の周期振動は，定数項，基本振動，高次振動に分解できる

振動成分（周波数と振幅）を調べることで，振動の原因と対策を考える

フーリエ係数の決定

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \cos m\omega t \, dt \qquad (1.19)$$

$f(\omega t)$ の偶関数成分

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \sin m\omega t \, dt \qquad (1.20)$$

$f(\omega t)$ の奇関数成分

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \, dt \qquad (1.21)$$

$f(\omega t)$ の平均値成分

1.3 フーリエ級数と調和解析

直交性

ある区間の同一関数の積（2乗）の積分値が一定値をとり，
相異なる関数の積の積分値が0になる性質

【確認】：三角関数（正弦関数および余弦関数）は直交関数系である

$$\int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t \, dt = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\cos(m-n)\omega t + \frac{1}{2}\cos(m+n)\omega t \right\} dt = 0 \qquad (m \neq n)$$
$$= T/2 \qquad (m = n)$$

$$\int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t \, dt = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\cos(m-n)\omega t - \frac{1}{2}\cos(m+n)\omega t \right\} dt = 0 \qquad (m \neq n)$$
$$= T/2 \qquad (m = n)$$

$$\int_0^T \cos m\omega t \sin n\omega t \, dt = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}\sin(m+n)\omega t - \frac{1}{2}\sin(m-n)\omega t \right\} dt = 0$$

1.3 フーリエ級数と調和解析

三角関数の公式（付録A2）

$$\cos m\omega t \cos n\omega t = \frac{1}{2}\cos(m-n)\omega t + \frac{1}{2}\cos(m+n)\omega t$$

$$\sin m\omega t \sin n\omega t = \frac{1}{2}\cos(m-n)\omega t - \frac{1}{2}\cos(m+n)\omega t$$

$$\cos m\omega t \sin n\omega t = \frac{1}{2}\sin(m+n)\omega t - \frac{1}{2}\sin(m-n)\omega t$$

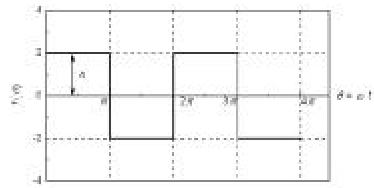
正弦関数および余弦関数は一周期の平均値が0である

$$\int_0^T \cos n\omega t \, dt = \int_0^T \sin n\omega t \, dt = 0$$

第1章　機械振動の基礎

1.3 フーリエ級数と調和解析

例題1.5　図1．12に示す矩形波をフーリエ級数（0<ωt<2π）に展開せよ



左の四角い波を
矩形波と言います

図1.12　矩形波(A=2のとき)

（解）

確認：周期Tとωとの関係　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$　**これは常識**

先ず　$f(\omega t)$ を定義する

$$f(\omega t)=\begin{cases} A & (0\le \omega t<\pi) \\ -A & (\pi \le \omega t < 2\pi) \end{cases}$$

区間ごとに分けて

第1章　機械振動の基礎

1.3 フーリエ級数と調和解析

例題1.5　（解）　後は，式(1.19)〜(1.21)により，フーリエ係数を求める

ここで，積分の結果について予想する
f(ωt)が奇関数なら a_n=0，偶関数なら b_n=0となるはず
f(ωt)の平均値が a_0 である

この例題の矩形波は，原点について点対称なので，奇関数．よって，　$a_n=0$

平均値は0になると予想されるので，　$a_0=0$

以下，実際に計算してゆく（各自確かめること）

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\cos n\omega t\,dt-\frac{\omega}{\pi}\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} A\cos n\omega t\,dt$$

$$=\frac{A}{n\pi}(\sin n\omega t-0)-\frac{A}{n\pi}(\sin 2n\pi-\sin n\pi)=0$$

1.3　フーリエ級数と調和解析

例題1.5　（解）　後は，式(1.19)〜(1.21)により，フーリエ係数を求める

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\sin n\omega t\,dt - \frac{\omega}{\pi}\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} A\sin n\omega t\,dt \\
&= -\frac{A}{n\pi}(\cos n\omega t - 1) + \frac{A}{n\pi}(\cos 2n\pi - \cos n\pi) \\
&= \frac{2A}{n\pi}(1 - \underline{\cos n\pi}) = \frac{2A}{n\pi}\{1 - \underline{(-1)}^2\}
\end{aligned}
$$

$$
a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\,dt - \frac{\omega}{\pi}\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} A\,dt = 0
$$

フーリエ級数は

$$
f(\omega t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{1-(-1)^2\}\sin n\omega t
$$

ここまで書いて完成！！

第1章　機械振動の基礎

1.3　フーリエ級数と調和解析

例題1.5　（解）　結果を図で見ると，nを増やすと矩形波に近づいてゆく

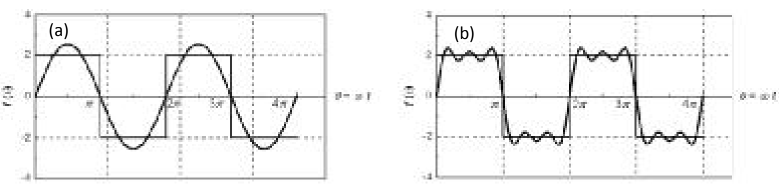


図1.13　フーリエ級数展開の例　(a) n=1，(b) n=5

1.4 振動系の基本要素

慣性要素：質量または慣性モーメント

復元要素：元に戻ろうとする要素

減衰要素：振動を減衰させる要素

表1.3　振動系の基本要素

要素の名称	記　号	発生する力
慣性要素		慣性力
復元要素		復元力
減衰要素		減衰力

モデル化　システムの力学モデル（数式）を作る

自由度：物体の運動を記述するのに必要な独立した変数（座標）の数

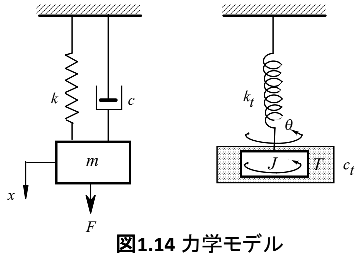


図1.14 力学モデル
(a)並進運動系，(b)回転運動系

表1.4　並進運動系と回転運動系の対応関係

	並進運動系	回転運動系
運動方程式	$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$	$J\ddot{\theta}+c_t\dot{\theta}+k_t\theta=T(t)$
変位項	変位：x [m]	角変位：θ[rad]
速度項	速度：$\dot{x}$ [m/s]	角速度：$\dot{\theta}$ rad/s]
外力項	励振力：F [N]	励振トルク：T [Nm]
慣性要素	質量：m [kg]	慣性モーメント：J [kg.m^2]
復元要素	ばね定数：k [N/m]	ねじりばね定数：k_t [Nm]
減衰要素	減衰係数：c [Ns/m]	ねじり減衰係数：c_t [Nms/rad]
ポテンシャルエネルギ	$\frac{1}{2}k\,x^2$ ：[J]	$\frac{1}{2}k_t\theta^2$ ：[J]
運動エネルギ	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ：[J]	$\frac{1}{2}J\,\dot{\theta}^2$ ：[J]

第1章　機械振動の基礎

1.4.1 復元力

ばね要素，振子の重力の影響等，物体を中立位置に戻す力

代表例：ばね要素　　$f=-kx$　　フックの法則

k　は比例定数で，ばね定数（ばね剛性）と呼ぶ

並列ばね

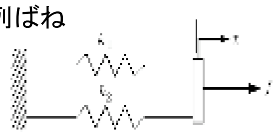


表1.5　(a)並列ばね

$$f=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)x=-k_{eq}x$$

各ばねの変位は等しく，各ばねの力の和が全体の力に等しい

等価ばね定数　$k_{eq}=\sum_{i=1}^{n}k_i$

直列ばね

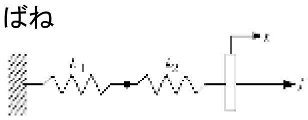


表1.5　(b)直列ばね

$$x=-\frac{f}{k_1}-\frac{f}{k_2}=-\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)f=-\frac{1}{k_{eq}}f$$

各ばねの内力は等しく，各ばねの変位の和が全体の変位に等しい

等価ばね定数　$\frac{1}{k_{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}$

第1章　機械振動の基礎

1.4.2 粘性減衰力

減衰要素，物体の運動エネルギを散逸して振動を減衰する力

代表例：ダッシュポット　　$f = -c\dot{x}$

c　は比例定数で，減衰係数（粘性減衰係数）と呼ぶ

並列ダッシュポット

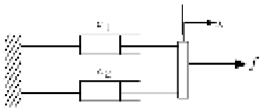


表1.6　(a)並列ダッシュポット

$$f = -c_1\dot{x} - c_2\dot{x} = -(c_1 + c_2)\dot{x} = -c_{eq}\dot{x}$$

各ダッシュポットの速度は等しく，
各々の力の和が全体の力に等しい

等価粘性減衰係数　$c_{eq} = \sum_{i=1}^{n} c_i$

直列ダッシュポット

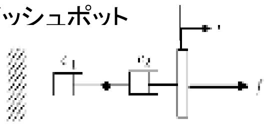


表1.6　(b)直列ダッシュポット

$$\dot{x} = -\frac{f}{c_1} - \frac{f}{c_2} = -\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)f = -\frac{1}{c_{eq}}f$$

各ダッシュポットの減衰力は等しく，各々の速度の和が全体の速度に等しい

等価粘性減衰係数　$\frac{1}{c_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}$

第1章　機械振動の基礎

1.5 モデル化と運動方程式

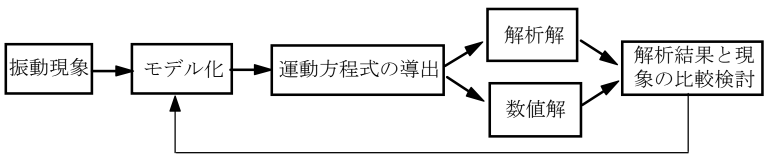


図1.17　振動現象の解析手順の流れ図

1. 振動現象のモデル化
2. 力学モデルの作成
3. 運動方程式の導出(数学モデルの作成）
4. 運動方程式の解の導出
5. 解析解と振動現象との比較検討

運動方程式を以下に導くか？
ここが半分以上！

手計算（解析解）をするか，
計算機（数値解）を使うか？

この授業では手計算
の方法を学びます！

第1章　機械振動の基礎

1.6 回転運動と慣性モーメント

回転運動と慣性モーメントについては，機械力学1の講義で終わっているが，復習の意味で再掲する．

図1.18に示すような質点系が，軸Oのまわりを回転するときの，トルク(モーメント)について考える．1個では，

$$dT = r^2 \ddot{\theta} dm \quad (1.27)$$

多質点(n個の質量)のときは

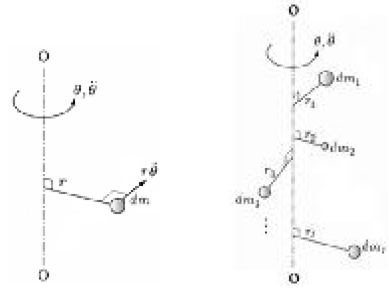
$$T = \sum_{i=1}^{n} dT_i = \ddot{\theta} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 dm_i \quad (1.28)$$

質量の大きさを微小とすれば

$$T = \int dT = \ddot{\theta} \int r^2 dm = J_0 \ddot{\theta}$$

ここで O軸に関する慣性モーメント

$$J_0 = \int r^2 dm$$



(a)　1質量の場合　　(b)　多質量の場合

図1.18　回転する質点系

慣性モーメントを　$J_0 = m k^2$

であらわすとき，回転半径：k

質量mで半径Rの円板の中心をとおり，面に垂直な軸回りの慣性モーメント

$$J_0 = \frac{m}{2} R^2$$

第1章　機械振動の基礎

1.6 回転運動と慣性モーメント

(1) 直交軸の定理

薄い板状の剛体では，面に垂直な z軸まわりの慣性モーメントJ_zと面内の直交する2軸(x, y) まわりの慣性モーメント J_x, J_y の間に，以下の関係がある

$$J_z = J_x + J_y$$

(2) 平行軸の定理

重心Gを通る z 軸まわりの慣性モーメントを J_zとすると，z 軸に平行な z'軸まわりの慣性モーメント $J_{z'}$ は，以下のようになる．

$$J_{z'} = J_z + d^2 m$$

（以上，証明略）

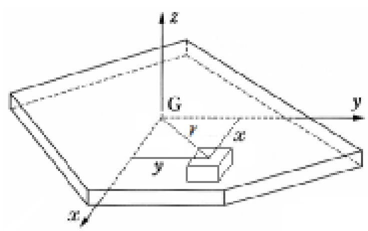


図1.20　薄い剛体（板状）の慣性モーメント

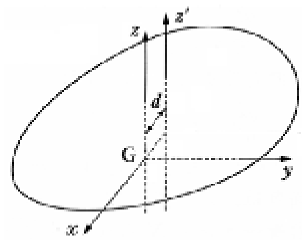


図1.21　重心を通らないz‘軸まわりの剛体の慣性モーメント