５章　多自由度系の振動

２自由度以上の系を多自由度系という．ただし，有限な自由度を持つものである．実際の複雑な構造物を解析する場合を考えると，これまでのバネ・質量系モデルのように質量とバネは分離されてはいない．６章のような棒および梁，また板などのような無限自由度を持つ系は連続体よばれ，解析的に解くには偏微分方程式を解くなどこれまでとは違った扱いが必要である．しかし，近年の計算機の発達により有限要素法などの数値解析法が広く用いられている．これらの数値的手法は，無限自由度の板・梁などを有限の自由度にモデル化（近似）して扱う．すなわち，解析的な解法にこだわらなければ，通常の設計計算では多自由度系の扱いを知っていれば十分であると言える．

「有限要素法」・・・どのようなものか？　計算力学（山田先生）

市販のコード（プログラム），NASTRAN，ANSYS，MARC など多数存在

この章のキーワード：

影響係数，ラグランジュの方程式，固有値問題，固有ベクトル，直交性

５．１　多自由度系

多自由度系の運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1\\
&m_i\ddot{x}_i-k_ix_{i-1}+(k_i+k_{i+1})x_i-k_{i+1}x_{i+1}=F_i\\
&\qquad\qquad i=2,3,\cdots,n-1\\
&m_n\ddot{x}_n-k_nx_{n-1}+(k_n+k_{n+1})x_n=F_n
\end{aligned}
\qquad （５．１－３）
$$

これらを，行列・ベクトル形式で表すと

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\} \qquad （５．４）$$

ここで，$[M]$および$[K]$はそれぞれ質量および剛性行列，$\{x\}$，$\{\ddot{x}\}$および$\{f\}$はそれぞれ変位，加速度および外力ベクトルである．

このような形で表されると，その後の取り扱いは共通である．それについては，５．４章から与えられる．ここからは，まず（５．２）式の行列・ベクトル形式の運動方程式を導くための手法を述べる．

５．２　影響係数

ある質点（m_j）にのみ単位外力（大きさ１）が加わったときに各質点（m_i）に生じる変位の大きさを（a_{ij}）影響係数という．

これによりm_jにのみF_jが加わったときにm_iに生じる変位をx_{ij}とすると

$$x_{ij}=a_{ij}F_j \qquad （５．６）$$

すべての質点$m_j(j=1,2,\cdots n)$に働く力$F_j(j=1,2,\cdots n)$に対するm_iの変位は，

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_j \quad i=1,2,\cdots,n \qquad （５．７）$$

であり，行列・ベクトル形式で書き直すと

$$\{x\}=[A]\{f\} \qquad （５．８）$$

ここで，[A]は影響係数からなる「たわみ行列(flexibility matrix)」である．また，フックの法則から

$$\{f\}=[K]\{x\} \qquad （５．９）$$

であり，[K]は「剛性行列(stiffness matrix)」である．たわみ行列と剛性行列の関係は

$$[A][K]=[I] \qquad （５．１０）$$

となる．ただし，［Ｉ］は単位行列(identity matrix)である．すなわち，［Ａ］と［Ｋ］は互いの逆行列である．

「例題５．１」

５．３　ラグランジュの方程式

ラグランジュの方程式は，エネルギを基にした方法である．自然界の運動はエネルギが最小であるような運動をするという原理を基にしている．

エネルギはスカラ量であるので, 力のように大きさと方向の関係に悩む必要はない．その分ラグランジュの方程式による運動方程式の導出は間違いにくい．ただし，適用する状況は系が複雑な場合が多いので（簡単なものは力の釣り合いから求められる），計算量は多くなる．

ダランベールの原理より，第ｉ番目の質量の運動方程式は

$$\mathbf{F}_i+(-m_i\ddot{\mathbf{x}}_i)=0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad （５．１７）$$

と表される．ここで，第ｉ番目の質量が仮に微少量変位（δx_i）したとする．そのとき，微少変位によりなされた仕事は

$$\sum_{i=1}^{n}\{\mathbf{F}_i+(-m_i\ddot{\mathbf{x}}_i)\}\cdot\delta x_i=0 \qquad （５．１８）$$

これは，微少変位により系の力の釣り合いが変化しない，すなわち微少変位を極限まで小さく取った状態を考える．これは，仕事（エネルギ）を各変位について微分すると力の釣り合いが得られることを示している．このような原理を仮想仕事の原理と言う．

ラグランジュの方程式はこれを一般的に書き直したものである．

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right]-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i \qquad （５．２１）$$

ここで

$$Q_i=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_j\bullet\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

ただし，Ｔ，Ｕは運動エネルギおよびポテンシャルエネルギ，q_iは一般座標を表す．またQ_iは一般力である．

一般座標は，とりあえず，これまで使ってきた物理座標（ｘ，ｙ，θなど）と考えてよいが, その系の運動を表すのに必要な最小の数の座標であることが要求される．単振り子の場合，質点の位置を表す場合，ひもの角度θは一般座標であるが，平面のデカルト座標（ｘ，ｙ）は拘束条件（$l^2=x^2+y^2$）が必要であり，一般座標とはいえない．

「例題５．２」

５．４　固有値問題

　多自由度系の場合に固有振動数と固有モードを計算するには，２自由度系までのような手計算による方法では，非常な忍耐力が必要である．(不可能な場合が多い)

　この章では，運動方程式を行列・ベクトル表記にすることを習ったので，これらを利用した計算法を知ることが必要である．以下の事柄は，手計算で行うことも可能ですが，現実的には計算機の利用を念頭においています．

　教科書の最後に固有値問題を解くプログラムが載せてあります．但し，N88BASIC なのでそのまま動作する計算機を持っている人は現在は少ないと思うので，自分で改造して下さい．なお，サンプルとして，Ｃ言語のプログラムをＨＰに載せてあります．
機力研ＨＰ(http://dynamic4.me.tokushima-u.ac.jp/)から日野のページへ行って下さい．
(直接は(http://dynamic4.me.tokushima-u.ac.jp/hp/staff/hino/hino.html))
そこで，「機械力学及び演習」－「コンピュータ解析」を選ぶと，ＶＣ＋＋５．０のプログラムがあります．(ＶＣ＋＋が必要です．ＶＣ＋＋はマイクロソフトの商標です)
ほとんどＶＣ＋＋の機能は使ってないので，中身を解読してもらえれば他のＣ言語ソフトでも動作するはずです．

　本題に入ると，ここでは，３章で行った手計算の固有値計算法を行列・ベクトル形式で書き直すことが主目的です．すなわち，運動方程式を

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \qquad (５．２６)$$

と表せることは，５．１章で習いました．この書き方は今後も使用されるので覚えておいて下さい．この解｛x｝を以下のように仮定する．

$$x_i(t)=X_iT(t) \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (５．２７)$$

ただし，X_iは定数，T(t)は時間関数である．($x=A_1\sin\omega t$　と同じことです．)ここで，式(5.27)を式(5.28)に代入すると

$$[M]\{X\}\ddot{T}(t)+[K]\{X\}T(t)=\{0\} \qquad (５．２８)$$

ただし，$\{X\}=\{X_1\ X_2\ \ldots.\ X_n\}^T$である．$T(t)=\sin\omega t$ として代入すると

$$([K]-\omega^2[M])\{X\}\sin\omega t=\{0\} \qquad (５．２９)$$

式(5.29)において常に等式が成り立つためには

$$([K]-\omega^2[M])\{X\}=\{0\} \qquad (５．３０)$$

であることが必要である．この形式を**固有値問題**（一般固有値問題）という．｛X｝は振動の振幅を表すから零ベクトルではないので，式(5.30)が成り立つためには

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \qquad (５．３１)$$

であることが必要である．式(5.31)を**振動数方程式**といい，ωはこの振動系の固有振動

数である．式(5.31)はω^2の多項式になっているので，ω^2はｎ個の解ω_1^2，ω_2^2，$\cdots\omega_n^2$を持っている．それらの最も低い振動数ω_1を基本固有振動数と言う．

ωの解において，第ｉ次固有振動数を式(5.30)に代入すると，

$$([K]-\omega_i^2[M])\{X^{(i)}\}=\{0\} \quad i=1,2,\ldots,n \qquad （５．３３）$$

となり，$X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)}$ のｎ元連立１次方程式である．これらは，式(5.31)から一意の解を得ることはできない．すなわち，互いの比率が決定できる．これを固有モードという．従って，条件を付加することにより各成分を決定する事ができる．条件を付加して値を決定する事を**正規化**と言う．

正規化の方法として，

ａ）$X_1^{(i)}=1$ という条件を加える．

ｂ）$\{X^{(i)}\}^T\{X^{(i)}\}=1$　　ベクトルの大きさを１

ｃ）$\{X^{(i)}\}^T[M]\{X^{(i)}\}=1$　　Ｍ直交

がある．

５．５　固有ベクトルの直交性とモード座標

固有振動数と固有ベクトルが固有値問題を解くことにより得られることがわかった．ここでは，固有ベクトルの性質について述べる．

$$\{X^{(i)}\}^T[M]\{X^{(j)}\}=\delta_{ij} \quad i,j=1,2,\ldots,n \qquad （５．４３）$$

ただし，δ_{ij}はKronecherのデルタ（$i=j$の時１，　$i\neq j$のとき０）である．このような性質をＭ直交性という．固有ベクトルが[M]について直交する場合，[K]についても直交する．１次からｎ次までの固有ベクトルを合成して，

$$[X]=[\{X^{(1)}\}\{X^{(2)}\}\cdots\{X^{(n)}\}] \qquad （５．４４）$$

のような正方行列を作ったものをモード行列という．モード行列を用いてＭ直交性およびＫ直交性を表すと以下のようになる．

$$[X]^T[M][X]=[I]$$
$$[X]^T[K][X]=[diag\ \ \omega^2] \qquad （５．４６）$$

式（５．２７）より｛ｘ｝の解はベクトル表記すると以下のように書ける．

$$\{x\}=[X]\{q\} \qquad （５．４８）$$

ここで，｛ｑ｝はモード座標と呼ばれる．すなわち，式(5.48)は物理座標｛ｘ｝を固有モードを使ってモード座標｛ｑ｝に座標変換（１次変換）したものと考えられる．これは単なる線形変換であるので，１対１の関係があり，未知数の数は同じであり，得られる解の精度も保たれる．しかし，モード座標に変換することにより以下のような利点があ

るために，振動解析においてはモード解析法がよく使われる．

　式(5.48)を式(5.26)に代入して，さらに左から［X］^{T}を乗じると以下のような運動方程式が得られる．

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{q}\}+[X]^T[K][X]\{q\}=\{0\} \tag{５．５０}$$

ここで，式(5.46)を用いると，式(5.50)は

$$\ddot{q}_i+\omega_i{}^2 q_i=0 \quad i=1,2,\ldots,n \tag{５．５１}$$

と変形できる．すなわち，非連成化されたｎ個の運動方程式である．（１自由度系がｎ個）通常の連成項をもつ運動方程式のように一度に解く必要はなく，各自由度の運動方程式を別々に解くことができる．これは計算量の大幅な減少を導く．｛ｑ｝について得られた解から式(5.46)を用いて物理座標｛ｘ｝の解を計算できる．

「例題５．３」