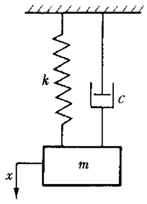
振動工学特論

振動解析の基礎
◆ 1 自由度系
◆ 2 自由度系

徳島大学大学院
ソシオテクノサイエンス研究部
日野 順市

Part 2

１章　１自由度振動系



１自由度MCK系

先ず，自由振動（外力＝０）を考える

運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \qquad (1)$$

左辺に移項して

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (2)$$

１．１　自由振動

解を右のように置く　$x = e^{\lambda t}$　(3)

運動方程式(2)に代入

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)e^{\lambda t} = 0 \qquad (4)$$

$e^{\lambda t} = 0$　では，振動しないので，

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \qquad (5)$$

これは特性方程式（振動数方程式）と呼ばれる

λ　についての2次方程式なので，これを解くと

１．１　自由振動の解

解の公式より

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad (6)$$

平方根中の符号が正か負かにより，系の応答が変わる．

また，ゼロになるときを考えると　$c_c = 2\sqrt{mk}$　(7)

とでき，臨界減衰係数と呼ぶ

ここで，以下の表記を使用する

固有円振動数　$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ (rad/s)$　(8)

減衰比　$\zeta = \dfrac{c}{c_c} = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$　(9)

１．１　自由振動の解

これらの記号で運動方程式を書き直すと

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (10)$$

この表記で，特性方程式の解を求めると

$$\lambda = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \qquad (11)$$

すなわち，平方根の中の符号により，2つの実数根または複素根が得られる．

オイラーの公式　$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin$

１．１　自由振動の解

(1) ζ＞１の場合（過減衰）

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (10)$$

ただし，C_1，C_2　は任意の定数である．ここで，

$$\lambda_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \qquad \lambda_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \qquad (11)$$

なので，式(10)は単調減少する関数であることが分かる．

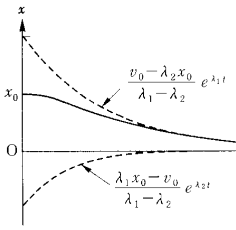
初期条件 $x(0) = x_0$　および　$\dot{x}(0) = v_0$　とすれば

$$C_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad C_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad (12)$$

1．1　自由振動の解

(1) ζ>1の場合（過減衰）の波形

単調減少となり，振動はしない



1．1　自由振動の解

(2) ζ=1の場合（臨界減衰）

このとき，解は重根となり　$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$　(13)

従って，解を以下のように選ぶ

$$x(t) = C_1 e^{-\omega_n t} + C_2\, t\, e^{-\omega_n t} \quad (14)$$

ここで，C_1，C_2 任意の定数である．

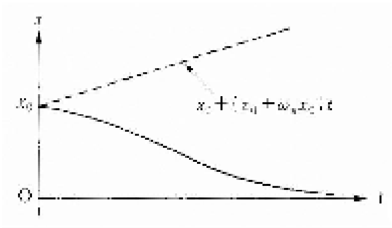
初期条件 $x(0) = x_0$　および $\dot{x}(0) = v_0$ とすれば

$$C_1 = x_0 \qquad C_2 = v_0 + \omega_n x_0 \quad (15)$$

1．1　自由振動の解

(2) ζ=1の場合（臨界減衰）の波形

単調減少となり，振動はしない



1．1　自由振動の解

(3) ζ<1の場合（不足減衰）

このとき，解は複素数となる

$$\lambda_1 = \left(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n \qquad \lambda_2 = \left(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n \quad (16)$$

ただし，虚数単位 $j^2 = -1$　である

解に，オイラーの公式を適用して整理すると

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\{C_1 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + C_2 \sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\} \quad (17)$$

（式(17)の導出は各自行って下さい）

1．1　自由振動の解

初期条件 $x(0) = x_0$　および $\dot{x}(0) = v_0$ とすれば

$$C_1 = x_0 \qquad C_2 = \frac{v_0 + \zeta\,\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n} \quad (18)$$

さらに，sin関数と cos 関数を合成すると

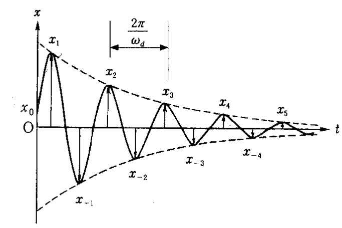
$$x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2 + (v_0 + \zeta\omega_n x_0)^2}{(1-\zeta^2)\omega_n^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \phi\right) \quad (19)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n x_0}{v_0 + \zeta\omega_n x_0}\right)$$

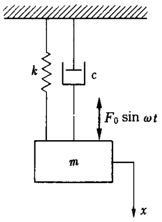
1．1　自由振動の解

(3) ζ<1の場合（不足減衰）の波形

減衰固有円振動数 $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$



1．2　強制振動の解



調和外力を受ける運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \sin \omega t \qquad (20)$$

x に係わる項のみを左辺に移項して

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \qquad (21)$$

強制振動の解は，正確には右辺をゼロと置いた基本解（同次解；自由振動の解）と右辺を考慮した特解の和（一般解）である

1．2　強制振動の解

自由振動の解は既に求めたので，特解を導く
特解は右辺の調和外力を考慮して，以下のようにおける

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \qquad (22)$$

ここで，表記を簡略化する目的で，以下の記号を用いる

$$X_{st} = \frac{F_0}{k}\ \text{（静変位）} \qquad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad (23)$$

式(21)で，両辺を m で割って整理する

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = X_{st}\omega_n^2 \sin \omega t \qquad (24)$$

1．2　強制振動の解

式(24)に式(22)を代入して，$\cos\omega t, \sin\omega t$ の係数で整理する

$$\begin{aligned}(1-\beta^2)C + 2\zeta\beta D &= 0\\ -2\zeta\beta C + (1-\beta^2)D &= X_{st}\end{aligned} \qquad (25)$$

これから，係数 C，D を求める

$$C = \frac{-2\zeta\beta X_{st}}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \qquad D = \frac{(1-\beta^2)X_{st}}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \qquad (26)$$

これらを式(22)に代入すると特解が求まる

1．2　強制振動の解

式(26)を式(22)に代入して，$\sin\omega t, \cos\omega t$ の合成を行う

$$x(t) = \frac{X_{st}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}\sin(\omega t + \phi) \qquad (25)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-2\zeta\beta}{1-\beta^2} \qquad (26)$$

三角関数の合成

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

1．2　強制振動の解

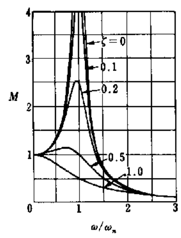
式(19)と式(25)との和が一般解である．ただし，系が減衰を持つ場合，自由振動は時間が経過すると収束してしまうので，特解のみが残ると考えられる．そこで，特解のみを強制振動の解とする場合もある

以上より，時間が十分経過した場合は，特解の振幅のみに着目することができる．振幅を静変位で除したものを振幅倍率とする

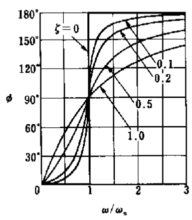
$$M = \frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \qquad (27)$$

1．2　強制振動の解

振幅(amplitude)



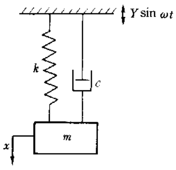
位相(phase)



振幅倍率 $M = \frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$　位相遅れ $\phi = \tan^{-1}\frac{-2\zeta\beta}{1-\beta^2}$

１．３　変位励振を受ける強制振動

次に，支持部から変位励振を受ける系を考える



運動方程式は

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y) \qquad (28)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky \qquad (29)$$

支持部の変位は

$$y = Y\sin\omega t \qquad (30)$$

式(30)を式(29)に代入して

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cY\cos\omega t + kY\sin\omega t \qquad (31)$$

１．３　変位励振を受ける強制振動

式(31)の両辺を m で割って整理する

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 2\zeta\omega_n Y\cos\omega t + \omega_n^2 Y\sin\omega t \qquad (32)$$

この場合も特解は，式(22)とおけるので，代入して
$\sin\omega t, \cos\omega t$ の係数について整理すると

$$\begin{aligned}(1-\beta^2)C + 2\zeta\beta D &= 2\zeta\beta Y \\ -2\zeta\beta C + (1-\beta^2)D &= Y\end{aligned} \qquad (33)$$

これより

$$C = \frac{-2\zeta\beta^3 X_{st}}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2} \qquad D = \frac{\{1+(4\zeta^2-1)\beta^2\}Y}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2} \qquad (34)$$

１．３　変位励振を受ける強制振動

特解は（三角関数の合成を行うと）

$$x(t) = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}\,Y}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}\sin(\omega t+\phi) \qquad (35)$$

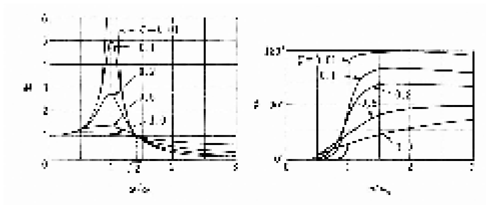
$$\phi = \tan^{-1}\frac{-2\zeta\beta^3}{1+(4\zeta^2-1)\beta^2} \qquad (36)$$

この場合の振幅倍率は

$$M = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \qquad (37)$$

１．３　変位励振を受ける強制振動

振幅(amplitude)　　位相(phase)

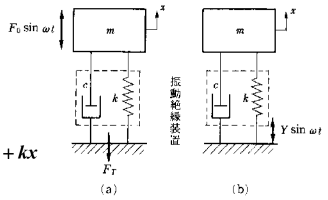


振幅倍率 $M = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}$　位相遅れ $\phi = \tan^{-1}\frac{-2\zeta\beta^3}{1+(4\zeta^2-1)\beta^2}$

１．４　振動の絶縁および伝達

(a) は外部への振動伝達を，(b)は外部からの振動絶縁を表す

$$F_T = c\dot{x} + kx$$

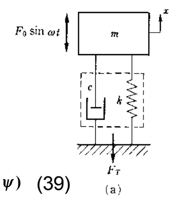


(a) は F_0 と F_T の比を，(b)は Y と X の比を調べることで性能が評価できる

１．４　振動の絶縁および伝達

(a) は調和外力による強制振動なので，解は式(25)より

$$x(t) = \frac{X_{st}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}\sin(\omega t+\phi)$$



床を通して伝達する力

$$F_T = c\dot{x} + kx \qquad (38)$$

$$\therefore \quad F_T = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}\,F_0}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}\sin(\omega t+\phi+\psi) \qquad (39)$$

$$\psi = \tan^{-1} - 2\zeta\beta \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{-2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

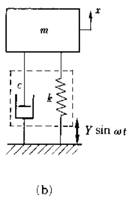
1．4　振動の絶縁および伝達

従って，力の伝達率は

$$T_R=\frac{|F_T|}{F_0}=\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \qquad (40)$$

(b) 外部からの振動絶縁は，
変位励振と同様なので

$$M=\frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \qquad (37)$$



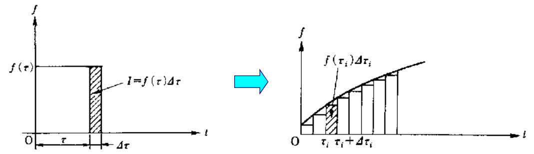
で表すことができる．すなわち，両者は同様な結果を得る

1．5　一般的な励振力による過渡振動

調和外力以外の励振力を受ける場合

任意外力は単位インパルス力に分解できる

単位インパルス入力



先ず，単位インパルス応答を求める

1．5　一般的な励振力による過渡振動

単位インパルス応答 ➡ 減衰自由振動

減衰自由振動の初期条件は，運動量と力積から

$$m(v_0-0)=f(\tau)\Delta\tau \qquad (41)$$

$\Delta\tau\to 0$　とすれば，右辺はデルタ関数として表せる

デルタ関数は以下の関係がある

$$\delta(t-t')=\begin{cases}\infty & (t=t')\\ 0 & (t\neq t')\end{cases}$$

$$\int_0^\infty \delta(t-t')dt=1$$

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-t')dt=f(t')$$

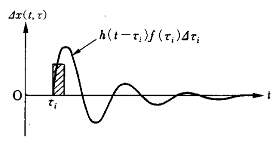
1．5　一般的な励振力による過渡振動

初期条件は

$$x_0=0 \qquad v_0=\int_0^\infty \frac{1}{m}\delta(t)dt=\frac{1}{m} \qquad (42)$$

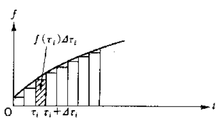
単位インパルス応答は

$$x=\frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t \qquad (43)$$



1．5　一般的な励振力による過渡振動

任意の入力を単位インパルスの和で表せるので



同様に応答も和（重ね合わせ）で表せる

$$x=\frac{1}{m\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}\int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n(t-\tau)\cdot f(\tau)d\tau \qquad (44)$$

（たたみ込み積分）

1．6　ラプラス変換による解法

式(21)はラプラス変換を利用しても解くことができる

ラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\mathcal{L}[f(t)]$$

微分の公式

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

逆ラプラス変換

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

１．６　ラプラス変換による解法

運動方程式はラプラス変換を利用しても解くことができる

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)$$

微分の公式を用いてラプラス変換を行うと

$$m(s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0))+c(sX(s)-x(0))+kX(s)=F(s)$$

ここで，初期条件を $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0$ とすると

$$(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)X(s)=\frac{F(s)}{m}$$

１．６　ラプラス変換による解法

$X(s)$ について解くと

$$X(s)=\frac{F(s)}{m}\cdot\frac{1}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

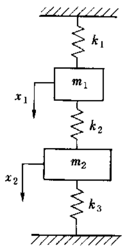
これを逆ラプラス変換すると解を求めることができる

問）外力が単位インパルスの時の応答を求めよ
　ただし，初期条件は $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0$　とする

１．６　ラプラス変換表

No.	$f(t)$	$F(s)$	No.	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$	8	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
2	$t^n(n=1,2,..)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	9	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	10	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
4	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+a)}$	11	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	12	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
6	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	13	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
7	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	14	$\delta(t)$	1

２章　２自由度振動系



２自由度系

運動方程式

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1-k_2(x_1-x_2)$$

$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)-k_3x_2 \qquad (1)$$

行列・ベクトル表示すると

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \qquad (2')$$

と書ける

２．１　自由振動の解

解を以下のように仮定する

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega t+\phi) \qquad (3)$$

これを式(2)に代入する

$$\left[\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

式(4)の最も簡単な解(自明解)は $X_1=X_2=0$ であるが，これは静的なつりあい状態を表すものである．したがって，少し妥協?して，X_1, X_2 を一意に決めることをやめ，不定な解を求める．

すなわち，係数行列のランクを下げる（行列式＝０）．

２．１　自由振動の解

$$\begin{vmatrix} k_1+k_2-\omega^2m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\omega^2m_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

これを展開すると

$$(k_1+k_2-\omega^2m_1)(k_2+k_3-\omega^2m_2)-k_2^2=0 \qquad (6)$$

ω^2について解くと（途中は省略）

$$\omega^2=\frac{1}{2}\left\{\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}+\frac{k_3}{m_2}\pm\sqrt{\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}-\frac{k_2}{m_2}-\frac{k_3}{m_2}\right)^2+4\frac{k_2}{m_1}\frac{k_2}{m_2}}\right\} \qquad (7)$$

という長い式になる．

2．1　自由振動の解

ここで， $m_1 = m_2 = m$ ， $k_1 = k_2 = k_3 = k$ とおくと

$$\omega_{n1}^2,\ \omega_{n2}^2 = \frac{k}{m},\ \frac{3k}{m} \tag{8}$$

となる．したがって，固有円振動数は2つ求まる．さらに，振幅 X_1 および X_2 を求める．

式(4)に固有円振動数を代入する． $\omega_{n1}^2 = \dfrac{k}{m}$ から代入してみる

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{Bmatrix} = 0 \tag{9}$$

となり， $X_{11} = X_{21}$ の関係が得られる．

2．1　自由振動の解

つぎに $\omega_{n2}^2 = \dfrac{3k}{m}$ を式(4)に代入する

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} = 0 \tag{10}$$

となり， $X_{12} = -X_{22}$ の関係が得られる．

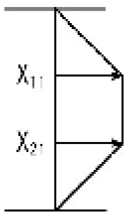
上記を整理して

$$\begin{aligned} &\text{第1次モード:} \quad \omega_{n1}^2 = \frac{k}{m} \qquad \frac{X_{11}}{X_{21}} = 1 \\ &\text{第2次モード:} \quad \omega_{n2}^2 = \frac{3k}{m} \qquad \frac{X_{12}}{X_{22}} = -1 \end{aligned} \tag{11}$$

ただし，各モードの振幅 X_1, X_2 は区別される

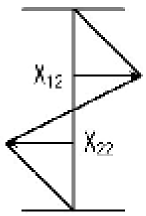
2．1　自由振動の解（振幅比）

第1次モード:



$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = 1$$

第2次モード:



$$\frac{X_{12}}{X_{22}} = -1$$

2．1　自由振動の解

自由振動の解は，以下のように表せる．

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{Bmatrix} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2) \tag{12}$$

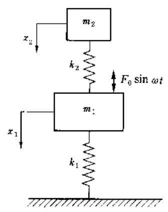
振幅比を用いると

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{11} \end{Bmatrix} \sin(\omega_{n1} t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} X_{12} \\ -X_{12} \end{Bmatrix} \sin(\omega_{n2} t + \phi_2) \tag{13}$$

各質量の初期条件が与えられると，自由振動を決定できる

2．2　強制振動の解

質量 m_1 に調和外力を受ける2自由度系（減衰を無視する場合）



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) + F_0 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{14}$$

強制振動解を以下のように置く

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t \tag{15}$$

2自由度系の強制振動

2．2　強制振動の解

質量 m_1 に調和外力を受ける2自由度系（減衰を無視する場合）

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

式(15)を代入して整理すると

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

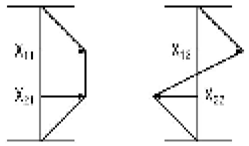
式(17)は右辺がゼロではなく，連立方程式の解を得られる

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

2．3　固有モードの直交性

先の振幅比をベクトル表示すると

第１次モード:　　第２次モード:



$\{X\}_1=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$　$\{X\}_2=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$

$$\{X\}_1^{\ T}\{X\}_1=\{1\ \ 1\}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=2$$

$$\{X\}_1^{\ T}\{X\}_2=\{1\ \ 1\}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}=0$$

$$\{X\}_2^{\ T}\{X\}_2=\{1\ \ -1\}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}=2$$

⬇

モードベクトルの直交性

2．4　モードベクトルの正規化

モードベクトルは任意の大きさをもつため，正規化が必要になる

（1）　ある成分を1と置く

$$\{X\}_1=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\qquad \{X\}_2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

（2）　ノルムを1と置く

$$\{X\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{X_1}{|X|} & \dfrac{X_2}{|X|} & \cdots & \dfrac{X_n}{|X|}\end{Bmatrix}^T\qquad |X|=\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$$

$$\{X\}_1^{\ T}\{X\}_1=\{1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}\}\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{Bmatrix}=1$$

2．4　モードベクトルの正規化

モードベクトルは任意の大きさをもつため，正規化が必要になる

（3）　M-直交性

$$\{X\}^T[M]\{X\}=[I]\qquad [I]: \textit{Identity matrix}$$

先の値より

$$\{X\}_1^{\ T}[M]\{X\}_1=\{1\ \ 1\}\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=2m$$

$$\{X\}_1^{\ T}[M]\{X\}_2=\{1\ \ 1\}\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}=0$$

$$\{X\}_2^{\ T}[M]\{X\}_2=\{1\ \ -1\}\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}=2m$$

$$\{X\}_1=\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2m}\\1/\sqrt{2m}\end{Bmatrix}\qquad \{X\}_2=\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2m}\\-1/\sqrt{2m}\end{Bmatrix}$$

2．4　モードベクトルの正規化

（3）　M-直交性(続き)

$$\{X\}^T[K]\{X\}=[\omega_n^2]\qquad [\omega_n^2]: \textit{Eigen value matrix}\ (\textit{Diagonal matrix})$$

$$\{X\}_1^{\ T}[K]\{X\}_1=\{1/\sqrt{2m}\ \ 1/\sqrt{2m}\}\begin{bmatrix}2k&-k\\-k&2k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2m}\\1/\sqrt{2m}\end{Bmatrix}=\frac{k}{m}$$

$$\{X\}_2^{\ T}[K]\{X\}_2=\{1/\sqrt{2m}\ \ -1/\sqrt{2m}\}\begin{bmatrix}2k&-k\\-k&2k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2m}\\-1/\sqrt{2m}\end{Bmatrix}=\frac{3k}{m}$$

$$\{X\}_1^{\ T}[K]\{X\}_2=\{1/\sqrt{2m}\ \ 1/\sqrt{2m}\}\begin{bmatrix}2k&-k\\-k&2k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1/\sqrt{2m}\\-1/\sqrt{2m}\end{Bmatrix}=0$$

2．5　物理座標からモード座標

系の変位をモードベクトルを用いて表す(1次従属)

$$\{x\}=q_1\{X\}_1+q_2\{X\}_2+\cdots+q_n\{X\}_n$$

q_n : arbitrary constants

書き直すと

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix}=[X_1\ X_2\cdots X_n]\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{Bmatrix}=[X]\{q\}$$

$[X]$: 固有モード行列

すなわち，n個の物理座標をn個の任意定数(モード座標)に変換するだけである

2．6　運動方程式の非連成化

減衰のない自由振動では

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

$$[M][X]\{\ddot{q}\}+[K][X]\{q\}=\{0\}$$

左から[X]の転置を乗じる

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{q}\}+[X]^T[K][X]\{q\}=\{0\}$$

先の直交性より

$$[I]\{\ddot{q}\}+[\omega_n^2]\{q\}=\{0\}$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1&=0\\ \ddot{q}_2+\omega_2^2 q_2&=0\\ &\vdots\\ \ddot{q}_n+\omega_n^2 q_n&=0\end{aligned}\right\}$$

n個の１自由度振動系である

2．6　運動方程式の非連成化

強制振動では（減衰のない）

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}$$

$$[M][X]\{\ddot{q}\}+[K][X]\{q\}=\{f\}$$

左から[X]の転置を乗じる

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{q}\}+[X]^T[K][X]\{q\}=[X]^T\{f\}$$

先の直交性より

$$[I]\{\ddot{q}\}+[\omega_n^2]\{q\}=\{\bar{f}_n\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1=\bar{f}_1\\ \ddot{q}_2+\omega_2^2 q_2=\bar{f}_2\\ \quad\vdots\\ \ddot{q}_n+\omega_n^2 q_n=\bar{f}_n\end{array}\right\}$$

n個の１自由度振動系である

2．7　モード解析

減衰のない1自由度系の強制振動解は（たたみ込み積分）

$$q_i(t)=A_i\sin(\omega_i t+\phi_i)+\frac{1}{\omega_i}\int_0^t \bar{f}_i(\tau)\cdot\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau$$

$$n=1,2,\ldots,n$$

得られたモード変位 q_n を座標変換式に代入して，
物理座標上の変位を得る

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix}=[X_1\ X_2\ \cdots\ X_n]\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{Bmatrix}=[X]\{q\}$$

2．7　モード解析

減衰が存在する場合

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}$$

比例減衰が仮定できる場合

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

比例減衰の場合，モードベクトルの直交性により

$$\{\ddot{q}\}+(\alpha[I]+\beta[\omega_i^2])\{\dot{q}\}+[\omega_i^2]\{q\}=\{\bar{f}_i\}$$

次のように置くと

$$2\zeta_i\omega_i=\alpha+\beta\omega_i^2$$

2．7　モード解析

$$\{\ddot{q}\}+[2\zeta_i\omega_i]\{\dot{q}\}+[\omega_i^2]\{q\}=\{\bar{f}_i\}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\ddot{q}_1+2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1+\omega_1^2 q_1=\bar{f}_1\\ \ddot{q}_2+2\zeta_2\omega_2\dot{q}_2+\omega_2^2 q_2=\bar{f}_2\\ \vdots\\ \ddot{q}_n+2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n+\omega_n^2 q_n=\bar{f}_n\end{array}}$$

よって，減衰がある場合の強制振動応答は

$$q_i(t)=A_i e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)}\sin(\sqrt{1-\zeta_i^2}\,\omega_i t-\phi_1)+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta_i^2}\,\omega_i}\int_0^t \bar{f}_i(\tau)\cdot e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)}\sin\sqrt{1-\zeta_i^2}\,\omega_i(t-\tau)\,d\tau$$

2．7　モード解析（参考）

比例減衰の係数α，βの決定方法

ω_i,ζ_i　が既知の場合（実験等により）

$2\zeta_i\omega_i=\alpha+\beta\omega_i^2$　より　　$[1\quad\omega_i^2]\begin{Bmatrix}\alpha\\\beta\end{Bmatrix}=\{2\zeta_i\omega_i\}$

２自由度系のとき

$$\begin{bmatrix}1&\omega_1^2\\1&\omega_2^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\\beta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\zeta_1\omega_1\\2\zeta_2\omega_2\end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix}\alpha\\\beta\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\omega_1^2\\1&\omega_2^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}2\zeta_1\omega_1\\2\zeta_2\omega_2\end{Bmatrix}$$

2．7　モード解析（参考）

初期条件の決定方法

$$\{x(t)\}=[X]\{q(t)\}\qquad\{\dot{x}(t)\}=[X]\{\dot{q}(t)\}$$

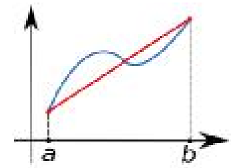
$$\Downarrow\qquad\qquad\qquad\Downarrow$$

$$\{q(t)\}=[X]^{-1}\{x(t)\}\qquad\{\dot{q}(t)\}=[X]^{-1}\{\dot{x}(t)\}$$

固有モード行列の逆行列により容易に求まる

台形公式(*Trapezoidal rule*)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



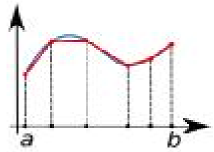
Linear Interpolation

たたみ込み積分 ➡ 数値積分により計算

台形公式(*Trapezoidal rule*)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}(b-a)\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2n}$$

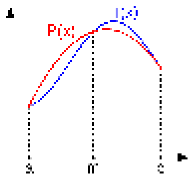
$$=\frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$



シンプソンの公式(Simpson's rule)

$$P(x)=f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)}+f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)}+f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$



Quadratic Interpolation

合成シンプソンの公式
(Composite Simpson's rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j})+4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1})+f(x_n)\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$