機械振動解析の基礎

計算機による振動解析（直接積分法）

徳島大学大学院
ソシオテクノサイエンス研究部
日野 順市

Part 3

7.1 数値積分法

運動方程式が得られたと仮定する

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\} \quad (1)$$

$[C]$:減衰行列

逐次積分法により微分方程式を解くため，時間を離散化して考える．時刻 t での運動方程式を

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \quad (2)$$

時刻 $t+\Delta t$ での変位および速度について考えると

$$\{x(t+\Delta t)\}=\{x(t)\}+\Delta t\{\dot{x}(t)\} \quad (3)$$

$$\{\dot{x}(t+\Delta t)\}=\{\dot{x}(t)\}+\Delta t\{\ddot{x}(t)\} \quad (4)$$

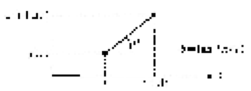
7.1 数値積分法

加速度は式(9)から

$$\{\ddot{x}(t)\}=[M]^{-1}\{\{f(t)\}-[C]\{\dot{x}(t)\}-[K]\{x(t)\}\} \quad (5)$$

すなわち，時刻 t での変位と速度がわかれば，式(5)より加速度が求められ，式(4)から次の時刻の速度が，式(3)から次の時刻の変位が求められる．これを繰り返すことで，逐次的に解を求めることができる

:



上記はオイラー法の考え方であり，刻み時間を小さくとらなければ発散する

7.2.1 ルンゲクッタ法

振動解析に限らず，一般的に用いられている．ただし，一階微分を解く方法なので，運動方程式を変形して解く．

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \quad (6)$$

式(9)で，$\{x_1\}=\{x(t)\}$ および $\{x_2\}=\{\dot{x}(t)\}$ とおくと

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -M^{-1}K & -M^{-1}C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ M^{-1}f(t)\end{Bmatrix} \quad (7)$$

と変形できる．これを以下のように置く

$$\{\dot{y}\}=[A]\{y\}+\{b\} \quad (8)$$

7.2.1 ルンゲクッタ法

ルンゲクッタ法では，時刻 $t+\Delta t$ での解を時刻 t での解を用いて次のように予測する．

$$\{y(t+\Delta t)\}=\{y(t)\}+\frac{1}{6}\{\{h_1\}+2\{h_2\}+2\{h_3\}+\{h_4\}\} \quad (9)$$

ここで，

$$\begin{aligned}\{h_1\}&=\Delta t\{[A]\{y(t)\}+\{b(t)\}\}\\ \{h_2\}&=\Delta t\{[A]\{y(t)+h_1/2\}+\{b(t+\Delta t/2)\}\}\\ \{h_3\}&=\Delta t\{[A]\{y(t)+h_2/2\}+\{b(t+\Delta t/2)\}\}\\ \{h_4\}&=\Delta t\{[A]\{y(t)+h_3\}+\{b(t+\Delta t)\}\}\end{aligned} \quad (10)$$

陽解法であるため，刻み時間 Δt を最大固有円振動数 ω_{max} に基づく周期 $T=2\pi/\omega_{max}$ に比べて十分小さくとる必要がある．

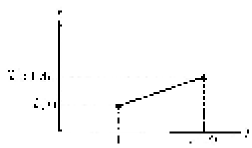
7.2.2 線形加速度法

ルンゲクッタ法は汎用的な方法で広く使われるが，刻み時間より解が発散することがあるので，より安定な方法が望まれる．

ここでの考え方の基本は，刻み時間の間は加速度が線形に変化すると仮定することである．

$$\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}=\{\ddot{x}(t)\}+\Delta t\{\dddot{x}(t)\} \quad (11)$$

$\{\dddot{x}(t)\}$ ；加加速度(jerk)



加速度が1次関数なので，
速度は2次関数，
変位は3次関数として表せる．

7.2.2 線形加速度法

線形加速度法の差分式は以下のようになる．初期値を与えて，式(12)～(14)を用いて逐次計算する．

$$\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}=\left[[M]+\frac{\Delta t}{2}[C]+\frac{(\Delta t)^2}{6}[K]\right]^{-1}\left\{\{f(t+\Delta t)\}-[C]\{\{\dot{x}(t)\}+\frac{\Delta t}{2}\{\ddot{x}(t)\}\}\right.$$
$$\left.-[K]\{\{x(t)\}+\Delta t\{\dot{x}(t)\}+\frac{(\Delta t)^2}{3}\{\ddot{x}(t)\}\}\right\} \qquad (12)$$

$$\{\dot{x}(t+\Delta t)\}=\{\dot{x}(t)\}+\frac{\Delta t}{2}\{\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}+\{\ddot{x}(t)\}\} \qquad (13)$$

$$\{x(t+\Delta t)\}=\{x(t)\}+\Delta t\{\dot{x}(t)\}+\frac{(\Delta t)^2}{6}\{\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}+2\{\ddot{x}(t)\}\} \qquad (14)$$

7.2.2 線形加速度法

式(12)～(14)は，式(6)と以下のテイラー展開の式(15)，(16)を用いて導くことができる．

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \qquad (6)$$

Taylar展開

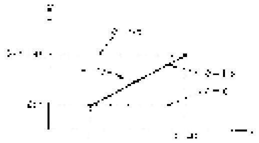
$$\{x(t+\Delta t)\}=\{x(t)\}+\frac{\Delta t}{1!}\{\dot{x}(t)\}+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\{\ddot{x}(t)\}+\frac{(\Delta t)^3}{3!}\{\dddot{x}(t)\}+\cdots \qquad (15)$$

$$\{\dot{x}(t+\Delta t)\}=\{\dot{x}(t)\}+\frac{\Delta t}{1!}\{\ddot{x}(t)\}+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\{\dddot{x}(t)\}+\cdots \qquad (16)$$

陰解法と呼ばれる方法であり，各時刻で運動方程式を満足させるので安定性は増す．しかし，絶対的な安定性はまだ無い

7.2.3 ニューマークβ法

刻み時間に係わらず安定性を保証する方法の1つがニューマークβ法である．加速度の変化をパラメータβにより変化させる方法である（通常はβ=１／４）．



$\beta=0$ ：$\{\ddot{x}(t)\}$の加速度を用いる

$\beta=1/6$: 線形加速度法と同じ

$\beta=1/4$ ：$\{\ddot{x}(t)\}$ と$\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}$の平均値を用いる

$\beta=1/2$ ：$\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}$ の加速度を用いる

7.2.3 ニューマークβ法

パラメータβを用いて線形加速度法の式(14)を以下のように書き換える．

$$\{x(t+\Delta t)\}=\{x(t)\}+\Delta t\{\dot{x}(t)\}+\frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{x}(t)\}+\beta(\Delta t)^2\{\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}-\{\ddot{x}(t)\}\} \qquad (17)$$

ニューマークβで解を求める差分式は以下のようになる．

$$\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}=\left[[M]+\frac{\Delta t}{2}[C]+\beta(\Delta t)^2[K]\right]^{-1}\left\{\{f(t+\Delta t)\}-[C]\{\{\dot{x}(t)\}\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta t}{2}\{\ddot{x}(t)\}\}-[K]\{\{x(t)\}+\Delta t\{\dot{x}(t)\}+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)(\Delta t)^2\{\ddot{x}(t)\}\}\right\} \qquad (18)$$

$$\{\dot{x}(t+\Delta t)\}=\{\dot{x}(t)\}+\frac{\Delta t}{2}\{\{\ddot{x}(t+\Delta t)\}+\{\ddot{x}(t)\}\} \qquad (19)$$

$$\{x(t+\Delta t)\}=\{x(t)\}+\Delta t\{\dot{x}(t)\}+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)(\Delta t)^2\{\ddot{x}(t)\}+\beta(\Delta t)^2\{\ddot{x}(t+\Delta t)\} \qquad (20)$$

7.3 固有値解析

運動方程式から振動系の固有振動数および固有モードを求めるために，固有値解析を行う．

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\} \qquad (1)$$

ここで，外力をゼロとし減衰を無視すると

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\} \qquad (2')$$

$\{x\}=\{X\}\sin\omega t$ を代入する

$$\left[[K]-\omega^2[M]\right]\{X\}=\{0\} \qquad (21)$$

行列式=0を満足するω を求める

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \qquad (22)$$

7.3 固有値解析

得られた固有振動数ωを式(21)に代入して固有モード$\{X\}$を求める．ただし,$\{X\}$は大きさが任意のベクトルである

固有振動数と固有モードの組は，自由度の数だけ存在する．したがって，自由度が増すと手計算で求めることは現実的ではなくなる．

固有値問題を解く方法が多数提案されている．

ヤコビ法，べき乗法（反復法）について述べる．　$\lambda=\omega^2$

標準固有値問題：　$[A]\{X\}=\lambda\{X\}$

一般固有値問題：　$[K]\{X\}=\lambda[M]\{X\}$

7.3.1 ヤコビ法

準備：標準固有値問題を導く(実対称行列の固有値問題)

$$[A]\{X\}=\lambda\{X\} \tag{23}$$

式(21)より $\lambda=\omega^2$とおくと，以下のように変形できる

$$[M]^{-1}[K]\{X\}=\lambda\{X\} \tag{24}$$

これより $[A]=[M]^{-1}[K]$ とおけば，式(23)になるが，

$[A]$ は，一般に対称行列にならない．非対称行列の固有値を解く方法は少なく．また，手順も煩雑である．

以下のように $[M]$を上三角行列と下三角行列に分解する

$$[M]=[U]^T[U] \tag{25}$$

7.3.1 ヤコビ法

式(25)を用いて

$$[K]=\lambda[U]^T[U]\{X\} \tag{26}$$

$[U]^T$ の逆行列を左から乗じて

$$([U]^T)^{-1}[K]=\lambda[U]\{X\} \tag{27}$$

さらに $\{X\}=[U]^{-1}\{Y\}$ とおくと

$$([U]^T)^{-1}[K][U]^{-1}\{Y\}=\lambda[U][U]^{-1}\{Y\} \tag{28}$$

$$\therefore\quad [A]\{Y\}=\lambda\{Y\} \tag{29}$$

ただし

$$[A]=([U]^T)^{-1}[K][U]^{-1} \tag{30}$$

7.3.1 ヤコビ法

実対称行列の標準固有値問題 $[A]\{X\}=\lambda\{X\}$ を以下のように変形できる行列 $[P]$ および $[Q]$ を求める.

$$[P][A][Q]\{X\}=\lambda[P][Q]\{X\} \tag{31}$$

ただし，

$$[P][A][Q]=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{32}$$

$$[P][Q]=[I] \tag{33}$$

$diag(\quad)$ は対角行列を表す

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ は固有値を表す

$[Q]=[P]^T=[X]$ は固有ベクトルからなる行列である

7.3.1 ヤコビ法

アルゴリズム:

1. $[A]$ の非対角成分 $a_{ij}(i\neq j)$ の中で最大のものを探し，その行番号 r，列番号 s とする. a_{rs} をピボット(pivot)という
2. $\theta=(1/2)\tan^{-1}\dfrac{2a_{rs}}{a_{rr}-a_{ss}}$ を求め $[P]_1$を計算する

ただし，

$$[P]_1=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r\text{列} & s\text{列} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{matrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{matrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} r\text{行} \\ s\text{行} \end{array}$$

$$[Q]_1=[P]_1^T$$

7.3.1 ヤコビ法

3. $[A]_1=[P]_1[A][Q]_1$ を計算する. この計算により$[A]$の a_{rs} の要素が0に変換される. ただし，同様の操作を引き続き行うため，再度0で無くなるが，この手順を繰り返すことで，対角項以外を全て0にすることができる.
4. 上述の1. ～3. の手順を繰り返し，$i=2,3,\cdots$ に関して $[A]_i=[P]_i[A]_{i-1}[Q]_i$ を計算する
5. $[A]_i$ の非対角成分が十分小さくなるまで繰り返す. このとき，$[A]_i$ の対角成分が固有値となり，固有ベクトルは

$$[Q]=[Q]_1[Q]_2\cdots[Q]_i\cdots$$

により得られる.

7.3.2 べき乗法

実対称行列 $[A]$の最大固有値を求める方法である.

$$[A]\{X\}=\lambda\{X\} \tag{23}$$

初期値ベクトル $\{X\}_0$ を固有ベクトルにより表すと

$$\{X\}_0=c_1\{X^{(1)}\}+c_2\{X^{(2)}\}+\cdots+c_n\{X^{(n)}\} \tag{34}$$

とできる. $c_1,c_2,\cdots,c_n$ は任意の定数である. 式(34)を式(23)の左辺に代入する.

$$[A]\{X\}_0=c_1[A]\{X^{(1)}\}+c_2[A]\{X^{(2)}\}+\cdots+c_n[A]\{X^{(n)}\} \tag{35}$$

式(35)を $[A]\{X\}_0=\{X\}_1$ とおくと，式(23)より

$$\{X\}_1=c_1\lambda_1\{X^{(1)}\}+c_2\lambda_2\{X^{(2)}\}+\cdots+c_n\lambda_n\{X^{(n)}\} \tag{36}$$

7.3.2 べき乗法

次に，$\{X\}_1$ を新しい近似ベクトルとして計算を繰り返すと，新しい近似ベクトル$\{X\}_2$を得る．

$$\{X\}_2 = d_1\lambda_1^2\{X^{(1)}\} + d_2\lambda_2^2\{X^{(2)}\} + \cdots + d_n\lambda_n^2\{X^{(n)}\} \qquad (37)$$

$d_1, d_2, \cdots, d_n$ は任意の定数である．同様の計算を繰り返すと，各モードベクトルの係数に λ_i が乗ぜられるので，λ_i の最も大きいモードベクトルが優勢になって，そのモードに収束して行く．すなわち，最大固有値に対応するモードが得られる．

減次（デフレーション）：固有値 λ_n の影響を取り除く

$$[A]_{NEW} = [A]_{OLD} - \lambda_n\{X^{(n)}\}\{X^{(n)}\}^T[M] \qquad (38)$$

7.4 モード解析

行列・ベクトル表記した不減衰自由振動系の運動方程式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \qquad (2')$$

解を次のように仮定する

$$\{x\} = \{X\}T(t) \qquad (39)$$

ただし，$\{x\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^T$

$\{X\} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}^T$は振幅

$T(t)$ は時間関数

式(39)を式(2')に代入して

$$[M]\{X\}\ddot{T}(t) + [K]\{X\}T(t) = \{0\} \qquad (40)$$

7.4 モード解析

$T(t) = \sin\omega t$ とおくと，式(40)は，

$$([K] - \omega^2[M])\{X\}\sin\omega t = \{0\} \qquad (41)$$

式(41)において常に等式が成り立つためには

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = \{0\} \qquad (42)$$

である必要がある．式(42)を一般固有値問題と呼ぶ．

式(42)で，$\{X\} = \{0\}$ 以外の解を持つには，

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \qquad (43)$$

となることが必要である．式(43)は振動数方程式と呼び，ω はこの系の固有円振動数である．これらは系の自由度と同じ数存在する．$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 対応する固有ベクトルは $\{X_1\}, \{X_2\}, \cdots, \{X_n\}$

7.4 モード解析

式(42)を以下のように変形する．

$$([A] - \lambda[I])\{X\} = \{0\} \qquad (44)$$

式(44)を標準固有値問題と呼ぶ．

一般固有値問題から標準固有値問題への変換は別途示す．

固有ベクトル$\{X\}$の正規化

ある振幅を基準：$\{X\} = \{1, X_2/X_1, X_2/X_1, \cdots, X_n/X_1\}$ (45)

ノルムを基準：$\{X\}^T\{X\} = 1$ (46)

M-直交による基準：$\{X\}^T[M]\{X\} = 1$ (47)

7.4 モード解析

運動方程式の非連成化

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \qquad (48)$$

変位ベクトルを固有ベクトルの線形結合で表す．

$$\{x\} = q_1\{X_1\} + q_2\{X_2\} + \cdots + q_n\{X_n\} = [X]\{q\} \qquad (49)$$

ここで，$[X] = \{X_1 | X_2 | \cdots | X_n\}$，$\{q\} = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}^T$

式(49)を式(48)に代入し，左から $[X]^T$を乗じると

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{q}\} + [X]^T[K][X]\{q\} = [X]^T\{f\} \qquad (50)$$

M-直交性により

$$[I]\{\ddot{q}\} + [\omega^2]\{q\} = [X]^T\{f\} \qquad (51)$$

7.4 モード解析

式(51)は非連成化されて

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= \bar{f}_1 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= \bar{f}_2 \\ &\vdots \\ \ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n &= \bar{f}_n \end{aligned} \qquad (52)$$

のように，n個の1自由度系になる．

各モードは1自由度系であり，モード座標上の解を得ると，式(49) $\{x\} = [X]^T\{q\}$ により物理座標上の解が求められる．

また，$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \cdots < \omega_n^2$ であり，$\bar{f}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ の大きさは各モード次数でそれほど大差ないので，高次モードの解は全体の応答にほとんど影響しなくなるため，高次モードは省略することが可能である．

５章　有限要素法による振動解析

先の数値積分法およびモード解析を実行するには，質量および剛性行列が必要である．

要素のモデル化

バネ・質量系の振動モデルがラグランジュの方程式などで求められればよいが，連続体の場合は一般に困難である．

有限要素法が利用される

無限自由度の系を有限自由度に近似して，多自由度系を導く

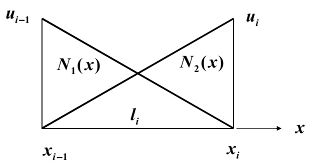
５．１　棒要素

要素中の変位が１次関数で近似できるとする

$$u(x)=\alpha_0+\alpha_1 x \qquad (1)$$

$$u(x)=N_1 u_{i-1}+N_2 u_i=[N]\{u\} \qquad (2)$$

u_{i-1},u_i は，各々節点 x_{i-1},x_i の変位



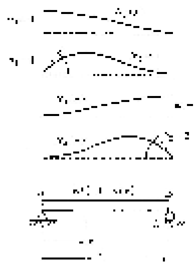
形状関数

$$N_1(x)=\frac{x_i-x}{l_i}$$

$$N_2(x)=\frac{x-x_{i-1}}{l_i}$$

５．２　はり要素

要素中の変位が３次関数で近似できるとする



はり要素

$$w(x)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3 \qquad (3)$$

$$w(x)=N_1 w_{i-1}+N_2\theta_{i-1}+N_3 w_i+N_4\theta_i \qquad (4)$$

w_{i-1},w_i は横変位，θ_{i-1},θ_i はたわみ角

要素の境界条件から形状関数は

$$N_1(x)=1-3(x/l)^2+2(x/l)^3$$
$$N_2(x)=x-3(x^2/l)+(x^3/l^2)$$
$$N_3(x)=3(x/l)^2-2(x/l)^3$$
$$N_4(x)=-(x^2/l)+(x^3/l^2)$$

５．３　定式化

要素中の変位が３次関数で近似できるとする

はり要素

$$w(x)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3 \qquad (3)$$

$$w(x)=N_1 w_{i-1}+N_2\theta_{i-1}+N_3 w_i+N_4\theta_i \qquad (4)$$

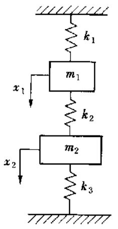
w_{i-1},w_i は横変位，θ_{i-1},θ_i はたわみ角

要素の境界条件から形状関数は

$$N_1(x)=1-3(x/l)^2+2(x/l)^3$$
$$N_2(x)=x-3(x^2/l)+(x^3/l^2)$$
$$N_3(x)=3(x/l)^2-2(x/l)^3$$
$$N_4(x)=-(x^2/l)+(x^3/l^2)$$

４章　計算機による振動解析

振動問題を計算機で解く場合には，運動方程式を行列・ベクトル表記する．



２自由度系

運動方程式

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

以下のように簡略化して表す

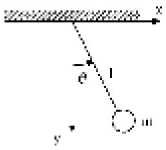
$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\} \qquad (2)$$

$[M]$：質量行列　$\{x\}$：変位ベクトル

$[K]$：剛性行列　$\{f\}$：外力ベクトル

4．1　ラグランジュの方程式

右図のような単振り子を考える



m の位置を表す座標として

$\boxed{(x, y)}$　または　$\boxed{\theta}$

を用いて表すことができるが，

$$x^2 + y^2 = l^2 \qquad (3)$$

から x と y は独立ではないことがわかる

一般座標：最小の数で系の運動を表すことができる互い
に独立な座標

4．1　ラグランジュの方程式

したがって，一般座標は θ である．

運動エネルギ　$T = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2$　(4)

ポテンシャルエネルギ　$U = mgl(1 - \cos\theta)$　(5)

ラグランジュの方程式

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i} \qquad (6)$$

$q_i \ (i = 1, \ldots, n)$　一般座標

Q_i　一般力

4．1　ラグランジュの方程式

$q_1 = \theta$ とすると，外力は働かないので $Q_i = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgl\sin\theta \qquad (7)$$

ラグランジュの方程式より運動方程式は

$$\boxed{ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0} \qquad (8)$$

対象とする系の自由度が増加しても，取り扱うことが可能である