

機械振動解析の基礎

徳島大学大学院
ソシオテクノサイエンス研究部
日野 順市

Part 7

6章 連続体の振動

実際の機械構造は、フレームや薄板などから構成されている。これらには慣性と弾性が分布している。

棒の振動

フレームの振動

板の振動

6.1 棒の縦振動

棒の縦振動 Longitudinal Vibration of Bar (Rod)

ρ 密度

E ヤング率

A 断面積

集中質量系から分布質量系(連続体, 無限自由度)へ。
偏微分方程式による表現

無限自由度の系を有限自由度に近似して, 多自由度系を導く
有限要素法が利用される

6.1.2 偏微分方程式の導出

座標の表し方

微小部分

6.1.2 偏微分方程式の導出

微小部分の力のつりあい

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad N(x+dx,t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N(x+dx,t) - N(x,t)$$

EAが一定の時 $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \therefore c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1)$

6.1.3 変数分離解

解を以下のように仮定する

$$u(x,t) = U(x)T(t) \quad (2)$$

ここで, 時間の関数は

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3)$$

(3)式を(2)式に代入すると


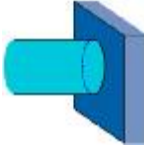
$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U(x) = 0 \quad (4)$$

2階微分の方程式なので解は

$$U(x) = C \cos \frac{\omega x}{c} + D \sin \frac{\omega x}{c} \quad (5)$$


6.1.4 境界条件

CとDは境界条件により決定できる

<p>自由端 (Free End)</p> $\frac{dU}{dx} = 0 \quad (6)$ <p>応力=0</p> 	<p>固定端 (Fixed End)</p> $U = 0 \quad (7)$ <p>変位=0</p> 
---	--

6.1.5 モード関数 1

以下の境界条件について考える



自由端 (Free End) 自由端 (Free End)

$$x=0: \frac{dU}{dx} = 0 \qquad \qquad \qquad x=l: \frac{dU}{dx} = 0$$

(5)式より $\frac{dU}{dx} = -C \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + D \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \quad (8)$

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = D = 0 \qquad \qquad \qquad \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=l} = -C \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega l}{c} = 0$$

6.1.5 モード関数 1

C=0では振動しないので、C≠0である

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (\text{振動数方程式}) \quad (9)$$

これよりωは

$$\omega_i = \frac{i\pi c}{l} = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (10)$$


これらのω_iに対応するモード関数は

$$U(x) = C \cos \frac{i\pi x}{l} \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

C は任意の定数

6.1.5 モード関数 2

以下の境界条件について考える



固定端 (Fixed End) 自由端 (Free End)

$$x=0: U = 0 \qquad \qquad \qquad x=l: \frac{dU}{dx} = 0$$

(5)式および(8)式より

$$\left. U \right|_{x=0} = C = 0 \qquad \qquad \qquad \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=l} = D \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0$$

6.1.5 モード関数 2

D=0では振動しないので、D≠0である

$$\cos \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (\text{振動数方程式}) \quad (12)$$

これよりωは

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi c}{2l} = \frac{(2i-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (13)$$

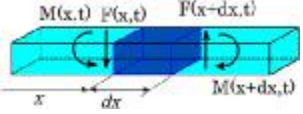
これらのω_iに対応するモード関数は

$$U(x) = D \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

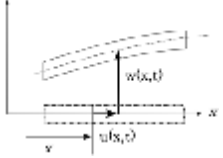
D は任意の定数

6.2 はりの横振動

はりの横振動(曲げ振動) Lateral (Bending) Vibration of Beam

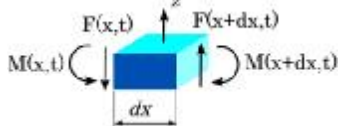


座標系



6.2 はりの横振動

はりの微小部分に働く力は



曲げモーメント $M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (15)

せん断力 $F = \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ (16)

6.2.1 偏微分方程式の導出

$x + dx$ に働く力は

曲げモーメント

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (17)$$

せん断力

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (18)$$

このせん断力の差がdxの部分に作用する。z方向($w(x, t)$)の運動方程式は

$$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (19)$$

6.2.2 偏微分方程式の解法

はりは一均の材料で出来ており、断面も一様であると

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \text{ただし} \quad c^4 = \frac{EI}{\rho A} \quad (20)$$

解は同様に変数分離型と仮定して

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (21)$$

(20)式に代入して

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \kappa^4 W = 0 \quad \text{ただし} \quad \kappa^4 = \frac{\omega^2}{c^4} \quad (22)$$

6.2.2 偏微分方程式の解法

解を $W(x) = e^{\lambda x}$ と置いて(22)式に代入すると

$$(\lambda^4 - \kappa^4)W = (\lambda - j\kappa)(\lambda + j\kappa)(\lambda - \kappa)(\lambda + \kappa)W = 0 \quad (23)$$

個別の解は

$$W_1 = e^{j\kappa x} \quad W_2 = e^{-j\kappa x} \quad W_3 = e^{\kappa x} \quad W_4 = e^{-\kappa x} \quad (24)$$

従って、一般解は

$$W(x) = C_1 e^{j\kappa x} + C_2 e^{-j\kappa x} + C_3 e^{\kappa x} + C_4 e^{-\kappa x} \\ = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x + C_3 \cosh \kappa x + C_4 \sinh \kappa x \quad (25)$$

$C_1 \sim C_4$ を境界条件から決定する

$$e^{j\kappa x} = \cos \kappa x + j \sin \kappa x \quad e^{-j\kappa x} = \cos \kappa x - j \sin \kappa x \\ e^{\kappa x} = \cosh \kappa x + \sinh \kappa x \quad e^{-\kappa x} = \cosh \kappa x - \sinh \kappa x$$

6.2.3 境界条件

境界条件は、固定端、支持端、自由端の3種類が考えられる

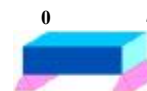


- 固定端(Fixed End) たわみと勾配が0 $W = dW/dx = 0$
- 単純支持端(Simply Support) たわみと曲げモーメントが0 $W = d^2W/dx^2 = 0$
- 自由端(Free End) 曲げモーメントとせん断力が0 $d^2W/dx^2 = d^3W/dx^3 = 0$

6.2.4 両端支持はりの解

境界条件は

$$x=0: W=0, \frac{d^2 W}{dx^2}=0 \\ x=l: W=0, \frac{d^2 W}{dx^2}=0 \quad (26)$$



(25)式をxで微分すると

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = -C_1 \kappa^2 \cos \kappa x - C_2 \kappa^2 \sin \kappa x + C_3 \kappa^2 \cosh \kappa x + C_4 \kappa^2 \sinh \kappa x \quad (27)$$

(25), (27)式に(26)式を適用すると

$$C_1 + C_3 = 0 \\ -C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 \cos \kappa l + C_2 \sin \kappa l + C_3 \cosh \kappa l + C_4 \sinh \kappa l = 0 \\ -C_1 \cos \kappa l - C_2 \sin \kappa l + C_3 \cosh \kappa l + C_4 \sinh \kappa l = 0 \quad (28)$$

6.2.4 両端支持はりの解

(28)式より振動数方程式は

$$\sin \kappa l = 0 \quad (29)$$

これを満たす κ は

$$\kappa_i = \frac{i\pi}{l} \quad i = 1, 2, \dots \quad (30)$$

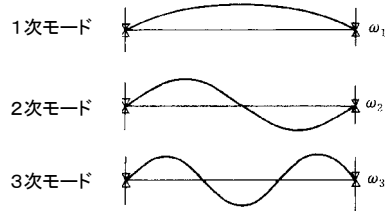
固有円振動数は

$$\omega_i = \kappa_i^2 c^2 = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad i = 1, 2, \dots \quad (31)$$

モード関数は

$$W_i(x) = C_2 \sin \frac{i\pi x}{l} \quad i = 1, 2, \dots \quad (32)$$

6.2.5 両端支持はりの振動モード



6.3 有限要素モデル

棒, はり, 板などの連続体を有限個の要素に分割して考える. 各要素中の変位は1次関数等の多項式で近似する.

棒要素



はり要素



6.3.1 棒要素

要素中の変位が1次関数で近似できるとする

棒要素 $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x = N_1 u_{i-1} + N_2 u_i \quad (1)$

u_{i-1}, u_i は横変位 x_{i-1}, x_i は座標

$x = x_{i-1}; u(x_{i-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1} = u_{i-1}$
 $x = x_i; u(x_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x_i = u_i$

$$\begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i-1} \\ 1 & x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} x_i & -x_{i-1} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$N_1(x) = \frac{x_i - x}{l_i}$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_{i-1}}{l_i}$$

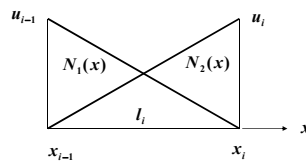
6.3.1 棒要素

要素中の変位が1次関数で近似できるとする

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (3)$$

$$u(x) = N_1 u_{i-1} + N_2 u_i = [N] \{u\} \quad (4)$$

u_{i-1}, u_i は, 各々節点 x_{i-1}, x_i の変位



形状関数

$$N_1(x) = \frac{x_i - x}{l_i}$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_{i-1}}{l_i}$$

6.3.2 はり要素

要素中の変位が3次関数で近似できるとする

はり要素 $w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$ (5)

$w(x) = N_1 w_{i-1} + N_2 \theta_{i-1} + N_3 w_i + N_4 \theta_i$ (6)

w_{i-1}, w_i は横変位, θ_{i-1}, θ_i はたわみ角
 $x_{i-1} = 0, x_i = l$ とすれば

(7)

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3(x/l)^2 + 2(x/l)^3 \\ N_2(x) &= x - 3(x^2/l) + (x^3/l^2) \\ N_3(x) &= 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3 \\ N_4(x) &= -(x^2/l) + (x^3/l^2) \end{aligned}$$

はり要素の形状関数は、右のようになることを示せ。

6.3.2 はり要素

はり要素の形状関数の形を以下に示す

(7)

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3(x/l)^2 + 2(x/l)^3 \\ N_2(x) &= x - 3(x^2/l) + (x^3/l^2) \\ N_3(x) &= 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3 \\ N_4(x) &= -(x^2/l) + (x^3/l^2) \end{aligned}$$

6.4 定式化

ラグランジュ関数を最小化することで定式化できる

$$L = V - T - W \quad (8)$$

V ひずみエネルギー
 T 運動エネルギー
 W 外部からのエネルギー

i番目の要素について

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l \{\epsilon\}^T A_i \{\sigma\} dx \\ T &= \int_0^l \{u\}^T (-\rho A_i \{\ddot{u}\}) dx \\ W &= \int_0^l \{u\}^T \{f\} dx \end{aligned} \quad (9)$$

A 要素の断面積
 ρ 棒の密度
 σ 要素内の応力
 ϵ ひずみ $\epsilon = \partial u / \partial x$

6.4 定式化

ラグランジュ関数を最小化することで定式化できる

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{u\} = [B] \{u\} \quad (10)$$

$$\{\ddot{u}(x, t)\} = [N] \{\ddot{u}\}$$

式(8)は以下のように書ける

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_0^l \{u\}^T [B]^T (EA_i) [B] \{u\} dx - \int_0^l \{u\}^T [N]^T (-\rho A_i) [N] \{\ddot{u}\} dx \\ &\quad - \int_0^l \{u\}^T [N]^T \{f\} dx \end{aligned} \quad (11)$$

6.4 定式化

式(11)で、 $\partial L / \partial \{u\}$ とおけば

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \{u\}} &= \int_0^l [B]^T (EA_i) [B] dx \{u\} + \int_0^l [N]^T (\rho A_i) [N] dx \{\ddot{u}\} \\ &\quad - \int_0^l [N]^T \{f\} dx = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)は以下のように書ける

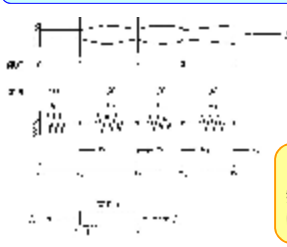
$$[M_e] \{\ddot{u}\} + [K_e] \{u\} = \{f_e\} \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned} [M_e] &= \int_0^l \rho A_i [N]^T [N] dx \\ [K_e] &= \int_0^l EA_i [B]^T [B] dx \\ \{f_e\} &= \int_0^l [N]^T \{f\} dx \end{aligned}$$

6章 連続体の振動

実際の機械構造は、フレームや薄板などから構成されている。これらには慣性と弾性が分布している。



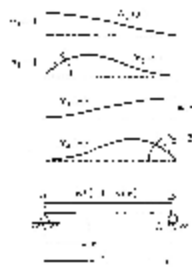
集中質量系から分布質量系(連続体, 無限自由度)へ。偏微分方程式による表現

有限要素法等の数値計算
無限自由度の系を有限自由度に近似して, 多自由度系を導く

要素のモデル化

6.1 定式化

要素中の変位が3次関数で近似できるとする



$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (3)$$

$$w(x) = N_1 w_{i-1} + N_2 \theta_{i-1} + N_3 w_i + N_4 \theta_i \quad (4)$$

w_{i-1}, w_i は横変位, θ_{i-1}, θ_i はたわみ角

要素の境界条件から形状関数は

$$N_1(x) = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3$$

$$N_2(x) = x - 3(x^2/L) + (x^3/L^2)$$

$$N_3(x) = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3$$

$$N_4(x) = -(x^2/L) + (x^3/L^2)$$

はり要素