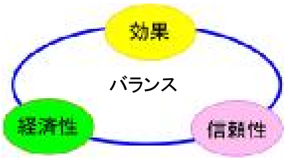
機械振動解析の基礎

徳島大学大学院
ソシオテクノサイエンス研究部
日野 順市

Part 7

８章　振動の制御

1. 受動制御（Passive Control）
2. 能動制御（Active Control）
3. 準能動制御（Semi-active Control）



8.1 制御方法

受動制御：エネルギ不要，高信頼性，経済的
パラメータ調整（不変），動吸振器

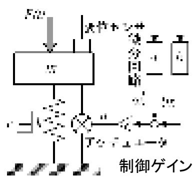
能動制御：高性能，エネルギ必要，コスト上昇
アクチュエータ，制御器

準能動制御：省エネルギ，中間的
パラメータ調整（可変），制御器

受動制御で目標が達成できればOK，
達成できなければ，能動制御を使用

8.2 振動制御（PD制御）

フィードバック制御（PD制御）



$$u(t) = -a\dot{x} - bx$$

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F(t) + u(t) \quad (8.1)$$

$$m\ddot{x} = -(c+a)\dot{x} - (k+b)x + F(t) \quad (8.2)$$

$$m\ddot{x} + (c+a)\dot{x} + (k+b)x = F(t) \quad (8.3)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta_a\omega_a\dot{x} + \omega_a^2 x = F(t)/m \quad (8.4)$$

$$\omega_a = \sqrt{(k+b)/m}$$

$$\zeta_a = (c+a)/2\sqrt{m(k+b)}$$

8.2 振動制御（極）

式(8.4)をラプラス変換する．ただし，$x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$(s^2 + 2\zeta_a\omega_a s + \omega_a^2)X(s) = F(s)/m \quad (8.5)$$

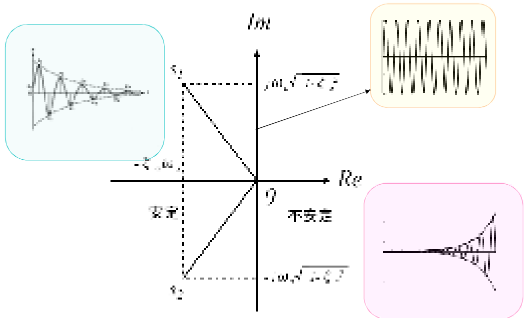
伝達関数は

s_1, s_2 を極(Pole)という

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta_a\omega_a s + \omega_a^2)} = \frac{1}{m(s-s_1)(s-s_2)} \quad (8.6)$$

$$\zeta_a > 1 : s_1, s_2 = -\zeta_a\omega_a \pm \omega_a\sqrt{\zeta_a^2 - 1}$$
$$\zeta_a = 1 : s_1, s_2 = -\zeta_a\omega_a \quad \text{（重根）}$$
$$\zeta_a < 1 : s_1, s_2 = -\zeta_a\omega_a \pm j\omega_a\sqrt{1-\zeta_a^2} \quad \text{（振動的）} \quad (8.7)$$

8.2 振動制御（s平面）



系の極と振動特性

8.2 振動制御（極の制御）

フィードバックゲインaおよびbにより極の位置を移動できる

$$\omega_a = \sqrt{(k+b)/m} \quad (8.8)$$

$$\zeta_a = (c+a)/2\sqrt{m(k+b)} \quad (8.9)$$

以下のパラメータの振動系があるとき，その極の位置を示せ

$m = 1(kg), c = 0(N \cdot s/m), k = 25(N/m)$

また，極を $(-1 \pm 5j)$ に配置したい時，ゲイン a，b を決定せよ

Ans. $\pm 5j$， $a = 2, b = 1$

8.3 状態方程式

１自由度系については，先の方法でゲインの決定OK

系の次数が増えると，解を求めることは困難

状態方程式(State Equation) ⇨ 極配置法(Pole Assignment Method)

式(8.10)を状態方程式に変換する

$$m\ddot{x} + kx = u \quad (8.10)$$

自明な式 $\dot{x} = \dot{x}$ を利用し，$x_1 = x$ および $x_2 = \dot{x}$ とおくと

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \quad (8.11)$$

8.3 状態方程式

ここで $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^T$ とおくと

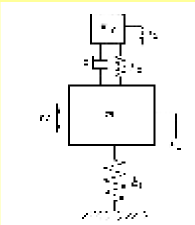
変位が測定できるとすれば，
出力方程式は

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x} \quad (8.12)$$

したがって，次のように表す
ことができる

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (8.13)$$

問題： 図の振動系の運動方程式を状態方程式に書き直せ．



２自由度振動系

8.4 可制御性・可観測性

まず，下記の条件を満足するかどうかを調べることが必要である

可制御性： 入力u(t)がすべての状態xに影響を及ぼすことができる
可観測性： すべての状態の挙動が出力に反映する

状態ベクトルxがn次元ベクトルのとき

可制御性： $rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (8.14)$

可観測性： $$rank\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (8.15)$$

8.4 可制御正準形式

状態方程式から伝達関数

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \sum_{i \in I_s} \frac{\beta_i \theta_i}{s - s_i} \quad (8.16)$$

ここで，s_i は固有値，$\beta_i \neq 0$ のとき可制御，$\theta_i \neq 0$ の時可観測
I_s は可制御，可観測を満たす i の集合である

伝達関数が以下のようにあたえられるとき

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_3 s^2 + c_2 s + c_1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (8.17)$$

これから実現（状態方程式と出力方程式）をもとめる

8.4 可制御正準形式

分母のみを考えて

$$G_0(s) = \frac{Y_0(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (8.18)$$

$Y(s)$ と $Y_0(s)$ の間には以下の関係がある

$$Y(s) = c_1 Y_0(s) + c_2 s Y_0(s) + c_3 s^2 Y_0(s)$$
$$y(t) = c_1 y_0(t) + c_2 \dot{y}_0(t) + c_3 \ddot{y}_0(t) \quad (8.19)$$

よって，式(8.16)より

$$(s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1) Y_0(s) = U(s)$$
$$\downarrow$$
$$y_0^{(3)}(t) + a_3 \ddot{y}_0(t) + a_2 \dot{y}_0(t) + a_1 y_0(t) = u(t) \quad (8.20)$$
$$y_0^{(3)}(t) = -a_3 \ddot{y}_0(t) - a_2 \dot{y}_0(t) - a_1 y_0(t) + u(t)$$

8.4 可制御正準形式

状態変数 $z_1 = y_0, z_2 = \dot{y}_0, z_3 = \ddot{y}_0$ とおくと

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -a_1 z_1 - a_2 z_2 - a_3 z_3 + u \\ y &= c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \end{aligned} \tag{8.21}$$

と書き直せる．行列形式で表すと

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{8.22}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} \tag{8.23}$$

8.4 可制御正準形式

ここで，以下の可制御正準形式が導けた

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

一般化すると

$$G(s) = \frac{c_n s^{n-1} + \cdots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \tag{8.25}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

8.5 極配置法

状態フィードバックによる極配置をおこなう

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{8.27}$$

$\mathbf{x}$：n次元ベクトル　状態量
u：スカラー　制御量（操作量）
y：スカラー　出力

状態フィードバックの制御力は

$$\begin{aligned} u &= -f_1 x_1 - f_2 x_2 - \cdots - f_n x_n \\ &= -\mathbf{f}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{8.28}$$

ただし $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}$

閉ループ系は以下のように表すことができる

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \tag{8.29}$$

8.5 極配置法

対象としている系が**可制御正準形式に変換できると**

$$\dot{\mathbf{z}} = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{f}})\mathbf{z} \tag{8.30}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & \cdots & \tilde{f}_n \end{bmatrix}$$

したがって

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_1 + \tilde{f}_1) & -(a_2 + \tilde{f}_2) & -(a_3 + \tilde{f}_3) & \cdots & \cdots & -(a_n + \tilde{f}_n) \end{bmatrix} \tag{8.31}$$

8.5 極配置法

式(8.31)の特性方程式は

$$\left| s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{f}}) \right| = s^n + (a_n + \tilde{f}_n) s^{n-1} + \cdots + (a_2 + \tilde{f}_2) s + (a_1 + \tilde{f}_1) \tag{8.32}$$

固有値（極）を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすれば

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = s^n + d_n s^{n-1} + \cdots + d_2 s + d_1 \tag{8.33}$$

係数を比較することで制御ゲイン $\tilde{\mathbf{f}}$ が求まる

$$\tilde{f}_i = d_i - a_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{8.34}$$

では，可制御正準形式で無い場合はどうするか？

8.6 変換行列

変換行列 $\mathbf{T}$ を導く（n=3の場合）

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \tag{8.35}$$

式(8.35)の関係から

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_3 \tag{8.36}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_1 \mathbf{t}_3 & \mathbf{t}_1 - a_2 \mathbf{t}_3 & \mathbf{t}_2 - a_3 \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.37}$$

8.6 変換行列

列毎に考えると

$$\mathbf{A}\mathbf{t}_1 = -a_1\mathbf{t}_3$$
$$\mathbf{A}\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 - a_2\mathbf{t}_3 \qquad (8.38)$$
$$\mathbf{A}\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_2 - a_3\mathbf{t}_3$$

式(8.36), (8.38)より

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{B}$$
$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{A}\mathbf{t}_3 + a_3\mathbf{t}_3 = \mathbf{A}\mathbf{B} + a_3\mathbf{B} \qquad (8.39)$$
$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{A}\mathbf{t}_2 + a_2\mathbf{t}_3 = \mathbf{A}^2\mathbf{B} + a_3\mathbf{A}\mathbf{B} + a_2\mathbf{B}$$

整理すると

$$\mathbf{A}[\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3] = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \qquad (8.40)$$
$$= [-a_1\mathbf{t}_3 \quad \mathbf{t}_1 - a_2\mathbf{t}_3 \quad \mathbf{t}_2 - a_3\mathbf{t}_3]$$

8.6 変換行列

n次元系に一般化すると

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 & \\ a_4 & \cdots & a_n & 1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_n & 1 & & & 0 & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \qquad (8.41)$$

先の可制御正準形式のフィードバックゲインより
元の系 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{f}$ と可制御正準形式の系 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{f}}$ の関係は

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{f})\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{f}}$$
$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}\mathbf{T}, \quad \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}\mathbf{T}^{-1}$$
$$\mathbf{f} = [d_1 - a_1 \quad d_2 - a_2 \quad \cdots \quad d_n - a_n]\mathbf{T}^{-1}$$

8.7 最適制御

極配置による振動制御は感覚的に分かり易いが，どこに極を配置すればよいのかが問題となる．ここで，ある評価規範を最小にする最適制御を利用する．評価規範を次のように定義する

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + ru(t)^2 \right\} dt \qquad (8.42)$$

ここで，$\mathbf{Q}$ は半正定行列，r は正の数（制御力が1つの時）
状態フィードバックのゲインは，

$$u^*(t) = -\mathbf{f}^*\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{f}^* = r^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \qquad (8.43)$$

ただし，$\mathbf{P}$ は以下のリカッチ方程式より決定する

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}r^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \qquad (8.44)$$

8.8 オブザーバ

制御を行う際に，実際には全ての状態量を得ることは困難
限られた測定値から状態量を推定する必要

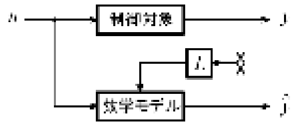
同一次元オブザーバの設計

制御対象の状態方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \qquad (8.45)$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

式(8.45)の数学モデル（推定値）

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u \qquad (8.46)$$
$$y = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$$



8.8 オブザーバ

真の出力と推定値間の誤差による修正

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y})$$
$$= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \qquad (8.47)$$
$$= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y$$

誤差ベクトル $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ とおけば式(8.47)は

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e} \qquad (8.48)$$

オブザーバゲイン $\mathbf{L}$ により誤差をゼロになるように収束させる
すなわち，$(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ の極を希望の特性に配置する **極配置**

8.7 最適制御

極配置による振動制御は感覚的に分かり易いが，どこに極を配置すればよいのかが問題となる．ここで，ある評価規範を最小にする最適制御を利用する．評価規範を次のように定義する

$$J = \int_0^\infty \left\{ \mathbf{x}(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + ru(t)^2 \right\} dt \qquad (8.42)$$

ここで，$\mathbf{Q}$ は半正定行列，r は正の数（制御力が1つの時）

状態フィードバックのゲインは，

$$u^*(t) = -\mathbf{f}^*\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{f}^* = r^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \qquad (8.43)$$

ただし，$\mathbf{P}$ は以下のリカッチ方程式より決定する

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{PB}r^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \qquad (8.44)$$