非線形振動について

線形振動について解析を行った結果，どうしても実際の現象と一致しないことがある．その原因のひとつに非線形性がある．構造物の非線形性には大きく分けて，材料によるものと，幾何学的な原因によるものがあるが，モデル化を行う際には何らかの非線形関数に置き換えて表すことになる．ここでは，最も簡単な非線形振動である単振り子について考察する．

単振り子の周期を調べる

「振り子の等時性」という言葉は聞いたことがあるはずである．これは，ガリレオが発見した法則で，「振り子の周期は，振り子の長さのみで決まり，重さや振幅には依存しない」というものである．はたして，これは正しいのだろうかとういう疑問を持ったことがあるだろうか？ここでは，単振り子の振動について非線形性を考慮した解析を行い，その周期について調べるものとする．

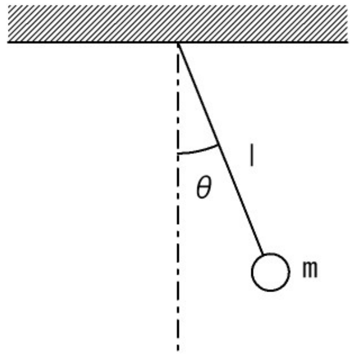

図１　単振子

１．第１次近似解

単振り子(Simple Pendulum)の運動方程式は，

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta \tag{1}$$

ただし，mは質量，ｌはひもの長さ，ｇは重力加速度，θは振れ角度である．ここで，$\sin\theta$をテイラー展開すると

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \tag{2}$$

となる．式(2)の右辺１次の項までを取った近似を用いて

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{3}$$

として考えてきた．これにより，式(3)は線形の微分方程式となり，固有角振動数および周期が以下のように計算される．

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4}$$

ここで，一般解は，

$$\theta = \theta'\cos(\omega_0 t + \delta) \tag{5}$$

として得られる．ここで，θ'は振幅，δは初期位相角である．初期条件として，t=0 で，$\theta = \theta_0$，$\omega = \omega_0$を用いると

$$\theta = \theta_0 \cos\omega_0 t = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{6}$$

第１次近似解はよく知っているように，周期Ｔは振り子の長さ１のみで決定されることになる．すな

わち，振り子の周期は長さによって決まり，振幅には依存しないことがわかる．これを，振り子の等時性と呼ぶことは承知のとおりである．

例として，長さ l ＝0.80m，重力加速度 g ＝9.8m/s^{2}とすると，周期は

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.80}{9.8}} = 1.79s \tag{7}$$

となる．

２．高次の近似解（第３次近似解）

単振り子の非線形性を以下のように近似する．

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} \tag{8}$$

すなわち，θ の３次の項まで考慮するものとする．ここでは，摂動法(Perturbation method)により高次の近似解を求める．式(1)は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_o{}^2\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) \tag{9}$$

ここで，$\theta \approx \alpha\cos(\omega t + \delta)$ とすると $\theta^3 \approx \alpha^3\cos^3(\omega t + \delta)$ で，これは $\cos(\omega t + \delta)$ と $\cos 3(\omega t + \delta)$ で表されるので，式(9)の解を

$$\theta = \alpha\cos(\omega t + \delta) + \beta\cos 3(\omega t + \delta) \tag{10}$$

とおき，$|\alpha| \geq |\beta|$ と仮定する．式(10)を式(9)に代入すると

$$\begin{aligned} &-\omega^2\alpha\cos(\omega t + \delta) - 9\omega^2\beta\cos 3(\omega t + \delta) \\ &\quad = -\omega_0{}^2[\alpha\cos(\omega t + \delta) + \beta\cos 3(\omega t + \delta) - \frac{1}{6}\{\alpha^2\cos 3(\omega t + \delta) \\ &\qquad + 3\alpha^2\beta\cos^2(\omega t + \delta)\cos 3(\omega t + \delta) + \cdots\}] \end{aligned} \tag{11}$$

となる．ここで，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$，$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ の公式を用いて式(11)の右辺を書き換えると

$$= -\omega_0{}^2[(\alpha - \frac{1}{8}\alpha^3 + \cdots)\cos(\omega t + \delta) + (\beta - \frac{\alpha^3}{24} - \frac{1}{4}\alpha^2\beta - \cdots)\cos 3(\omega t + \delta) + \cdots] \tag{12}$$

となり，式(11)の左辺と右辺での $\cos(\omega t + \delta)$ と $\cos 3(\omega t + \delta)$ の係数を比較することにより

$$-\omega^2\alpha = -\omega_0{}^2(\alpha - \frac{1}{8}\alpha^3) \tag{13}$$

$$-9\omega^2\beta = -\omega_0{}^2(\beta - \frac{1}{24}\alpha^3) \tag{14}$$

が得られる．ただし，$|\alpha| \geq |\beta|$ の関係を用いた．式(13)より

$$\omega^2 = \omega_0{}^2(1 - \frac{1}{8}\alpha^2) \tag{15}$$

すなわち

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{8}\alpha^2} \approx \omega_0 (1 - \frac{1}{16}\alpha^2) \tag{16}$$

このようにして，角振動数についてのより高次の近似式が得られた．これに対応した周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 (1 - \frac{1}{16}\alpha^2)} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \frac{1}{16}\alpha^2) \tag{17}$$

となる．式(17)では右辺の括弧内の第 2 項に振幅が入っているので，振り子の等時性は成り立たず，振幅が大きいほど周期も長くなることがわかる．また，式(14)からは

$$\beta = \frac{(\omega_0{}^2 / 24)\alpha^3}{-9\omega^2 + \omega_0{}^2} \approx \frac{\omega_0{}^2 \alpha^3 / 24}{-9\omega_0{}^2 (1 - \frac{\alpha^2}{8}) + \omega_0{}^2} \approx \frac{\omega_0{}^2 \alpha^3 / 24}{-8\omega_0{}^2} = \frac{-\alpha^3}{192} \tag{18}$$

が得られる．これにより，結果をまとめると

$$\theta = \alpha \cos(\omega t + \delta) - \frac{\alpha^3}{192}\cos 3(\omega t + \delta) \tag{19}$$

ただし

$$\omega = \omega_0 (1 - \frac{\alpha^2}{16}), \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{\alpha^2}{16}) \tag{20}$$

となる．具体的な例で，周期Tがどのぐらい大きくなるかを確認すると，長さｌ＝0.80m，重力加速度ｇ＝9.8m/s²とすると，

$$T = 2 \times 3.142 \times \sqrt{\frac{0.80}{9.8}} \times \left(1 + \frac{1.047^2}{16}\right) = 1.92s \tag{21}$$

となる．この値は，第１次近似解より約７％大きいことがわかる．

３．数値解

ここでは，計算機を使って解を求める方法について述べる．すなわち，常微分方程式の数値積分法を用いる方法である．数値積分法には多くの方法があるが，ここでの数値積分法は，初期値問題を解くための逐次積分法である．この方法の利点は，運動方程式をそのまま使って解くことができるので，非線形の運動方程式を解くために特別な知識を必要としないことである．

運動方程式が

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{22}$$

であるので，これは 2 階の微分方程式となる．数値積分を適用する際に，次の角速度と角度の関係を用いることにする．

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{23}$$

式(22)を角速度ωで表すと

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{24}$$

となる．式（23）および（24）を，以下のような差分式で表す．

$$\frac{\theta_{n+1}-\theta_n}{\Delta t} = \omega_n\,, \qquad \theta_{n+1} = \theta_n + \omega_n \Delta t \tag{25}$$

$$\frac{\omega_{n+1}-\omega_n}{\Delta t} = -\frac{g}{l}\sin\theta_n\,, \qquad \omega_{n+1} = \omega_n + \Delta t\left(-\frac{g}{l}\sin\theta_n\right) \tag{26}$$

振り子の長さ l ＝0.80m，重力加速度 g ＝9.8m/s²として，初期条件 t ＝０において振幅 θ_0=60° と角速度 ω_0=0 を与えると，付録のプログラムより振幅のグラフは次のようになる．刻み時間Δ t =0.001 で，式（22）を解いたものを"NonLinear"，1 次近似を"Linear"としている．ここでの差分式による方法はオイラー法と呼ばれるものである．ただし，周期を直接求めることはできない．

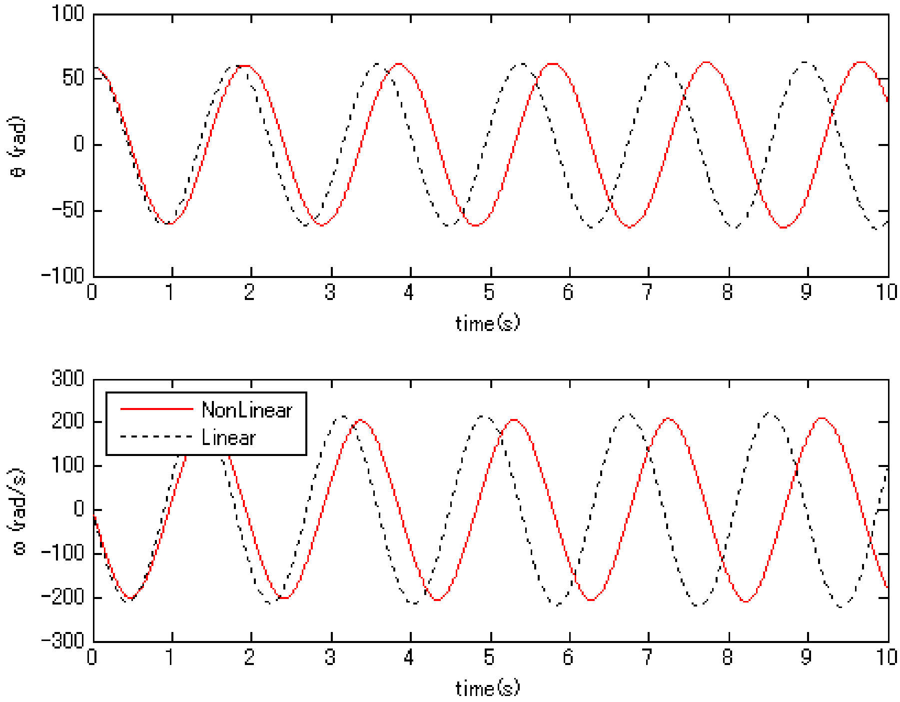

図２　数値解析の結果

４．厳密解

ここでは，厳密解をもとめる，式(22)の両辺に $\dot{\theta}$ をかける．

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\dot{\theta}\sin\theta \tag{27}$$

すなわち，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{g}{l}\frac{d}{dt}\cos\theta \tag{28}$$

となる．次に，両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = C + \frac{g}{l}\cos\theta \tag{29}$$

となる．ただし，C は積分定数で，初期条件として， t ＝ 0 において振幅 $\theta = \theta_0$ と角速度 $\dot{\theta} = 0$ を用いると，$C = -\frac{g}{l}\cos\theta_0$ と定まる．よって

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{30}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} \tag{31}$$

が得られるが， $0 < \theta < \pi/2$， $\dot{\theta} < 0$ の状態を考えて負号を採用し，変数を分離すると

$$\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \frac{-d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \tag{32}$$

となる．ここで， $\sin\frac{\theta_0}{2} = k$ 　とおき

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi \qquad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = k\cos\phi\, d\phi \qquad (33),\ (34)$$

と変数を変換すると

$$\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{-2k\cos\phi\, d\phi}{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{k^2 - k^2\sin^2\phi}} = -\frac{-2\,d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{35}$$

が得られる．次に，式(35)の両辺を積分する．左辺の積分範囲は 0～t まで，右辺の積分の範囲はπ/2～φまでであることに注意して

$$\sqrt{\frac{g}{l}}t = \int_{\pi/2}^{\phi}\frac{-d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{36}$$

が成り立つ．ここで， φ=0 としたときの t が 1/4 周期に相当するので，周期 T として

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k) \tag{37}$$

が得られる．式(38)の右辺の積分 $K(k)$ は第 1 種の完全楕円積分といわれ，表のような数値積分の値が得られている．この表の数値を用いて，振り子の長さ l ＝0.80m，重力加速度 g ＝9.8m/s²として，初期条件 t ＝0 において振幅 θ_0=60° を与えると以下のようになる．

$$T = 4\times\sqrt{\frac{0.80}{9.8}}\times 1.6858 = 1.927s \tag{38}$$

表１　第１種の完全楕円積分の数値

θ_0[deg]	θ_0[rad]	k	K(k)
10	0.1745	0.0872	1.5738
20	0.3491	0.1736	1.5828
30	0.5236	0.2588	1.5981
40	0.6981	0.3420	1.6200
50	0.8727	0.4226	1.6490
60	1.0475	0.5000	1.6858
70	1.2217	0.5736	1.7312

５．問題

5.1　振り子の長さ $l = 1.0$m の場合に，初期振幅 θ_0 を 10°，20°，30°，40°，50°，60°，70° として，第１次近似解，高次近似解，厳密解の振り子の周期を求めて図示して比較せよ．

5.2　ここで，与えた付録のプログラムにおいて，刻み時間を $\Delta t = 0.01$ s とすると解の振幅は増加してゆく．これを防ぐための手法について考えよ．（他の数値積分法について考察せよ）

付録：MATLAB　プログラム

```
% 非線形単振子
%
g=9.8;
l=0.80;
qdeg0=60;
%
qdeg0=qdeg0.*pi/180;
%
qn0=qdeg0;
wn0=0.0;
ql0=qn0;
wl0=wn0;
Dt=0.001;
t=0.0;
Tend=10;
%
qn=[];
wn=[];
ql=[];
wl=[];
Time=[];
%
while (t<=Tend)
    %
    wn1=wn0+Dt*(-g/l*sin(qn0));
    qn1=qn0+Dt*wn0;
    %
    wl1=wl0+Dt*(-g/l*ql0);
    ql1=ql0+Dt*wl0;
    %
    qn0=qn1;
    wn0=wn1;
    %
    ql0=ql1;
    wl0=wl1;
    %
    qn=[qn qn0];
    wn=[wn wn0];
    %
    ql=[ql ql0];
    wl=[wl wl0];
    %
    Time=[Time t];
    %
    t=t+Dt;
    %
end
%
deg=180/pi;
%
figure
subplot(2,1,1)
plot(Time,qn.*deg,'r',Time,ql.*deg,'k')
xlabel('time(s)')
ylabel('¥theta (rad)')
subplot(2,1,2)
plot(Time,wn.*deg,'r',Time,wl.*deg,'k')
xlabel('time(s)')
ylabel('¥omega (rad/s)')
h = legend('NonLinear','Linear',2);
%
```