

実験モード解析

調和外力を受ける1自由度粘性減衰振動系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{j\omega t} \quad (1)$$

ここで、 m, c, k は質量、粘性減衰係数、剛性を、 x は変位を表す。調和外力 $Fe^{j\omega t}$ が働くとき、運動方程式の解は、 $x=Xe^{j\omega t}$ で与えられるので、これらを式(1)に代入する。

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k)X = F \quad (2)$$

式(2)から外力・変位間の伝達関数（コンプライアンス）に変形する。

$$\frac{X}{F} = \frac{1/k}{1 - \beta^2 + 2j\zeta\beta} \quad (3)$$

ここで、 $\beta = \omega/\omega_{n0}$ 、 $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$ であり、 $\omega_{n0} = \sqrt{k/m}$ は不減衰固有角振動数、 ζ は減衰比である。式(3)は虚数を含むことから複素数の式となる。その表現方法として、以下のような(1)ボード線図

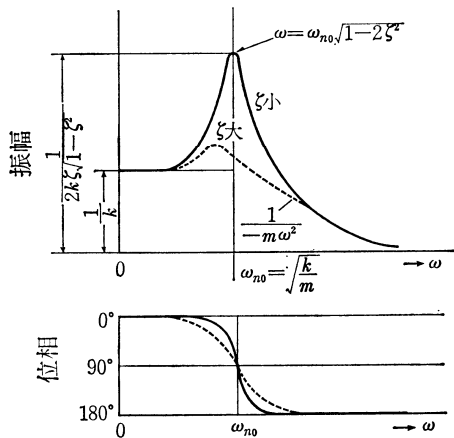


図1 ボード線図

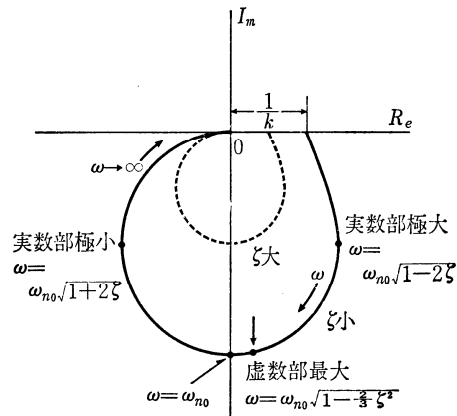


図2 ナイキスト線図

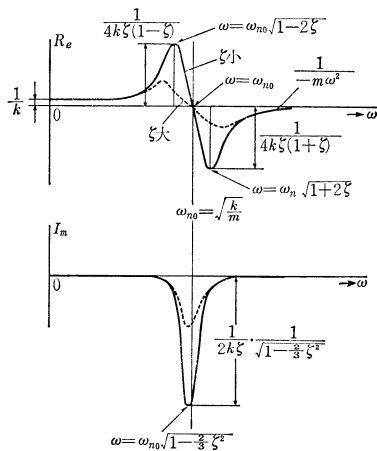


図3 コクアド線図

表1 伝達関数の種類

定義	和名	英名	関係	単位 (SI)
変位/力	コンプライアンス ¹⁾	compliance	G	m/N
速度/力	モビリティ	mobility	$j\omega G$	m/(Ns)
加速度/力	アクセラランス ²⁾	accelerance	$-\omega^2 G$	m/(Ns ²)
力/変位	動剛性	dynamic stiffness	$1/G$	N/m
力/速度	機械インピーダンス	mechanical impedance	$-j/(\omega G)$	Ns/m
力/加速度	動質量	apparent mass	$-1/(\omega^2 G)$	Ns ² /m

(注1) コンプライアンスは、レセプタンス (receptance)、アドミッタンス (admittance)、あるいは動柔性 (dynamic flexibility) とも呼ぶ。

(注2) アクセラランスは、イナータンス (inertance) とも呼ぶ。

(2)ナイキスト線図がよく知られている。また、加振周波数 ω に対する実数部および虚数部をそのまま表す(3)コクアド線図と呼ばれるものもある。伝達関数は、周波数応答曲線(Frequency Response Function)とも呼ばれ、表1に示すように入力と出力の関係から種々の呼び方がある。

F R Fを実験で求める方法は図4に示すような方法がある。加振器で実験対象構造物を加振して、その振動を加速度計等のセンサで測定し、信号処理装置によりF R Fを求める。求めたF R Fからモード特性(固有振動数、減衰比、振動モード)を求める。加振装置による励振周波数と励振力の比較を図5に示す。図6に示す機械式的加振器はおもりの偏心を利用するものである。図7には動電型加振器の例を示す。図8はインパルスハンマの例を示す。振動の測定には一般には圧電型加速度計が用いられることが多い。図9に圧電型加速度計の構造を示す。表2に振動計の種類と特徴について記す。FFT解析装置の概観を図10に示す。

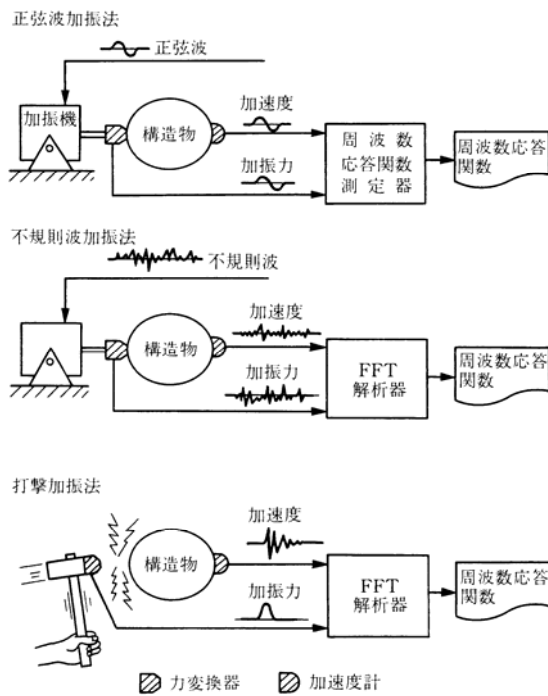


図4 周波数応答の求め方

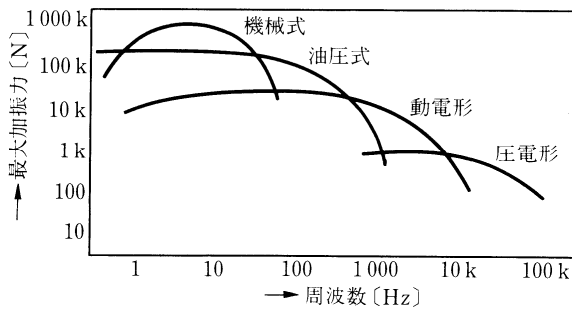


図5 加振器の特性

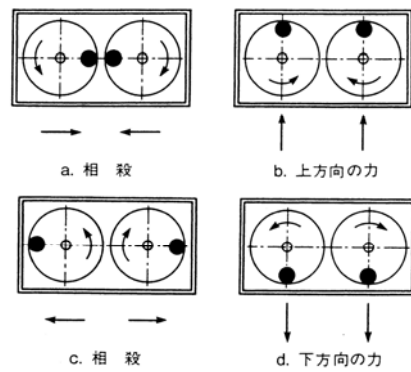


図6 機械式加振器

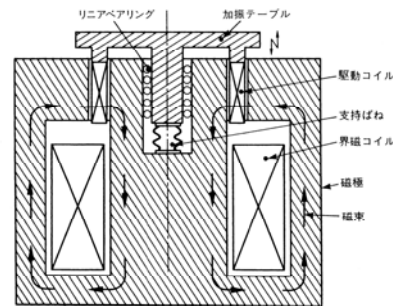


図7 動電型加振器

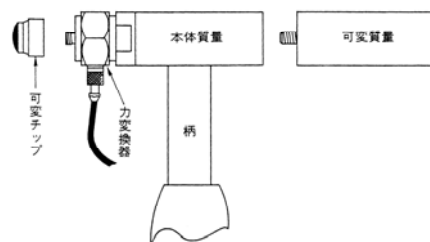


図8 インパルスハンマ

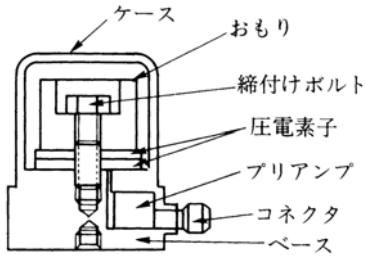


図 9 圧電型加速度計

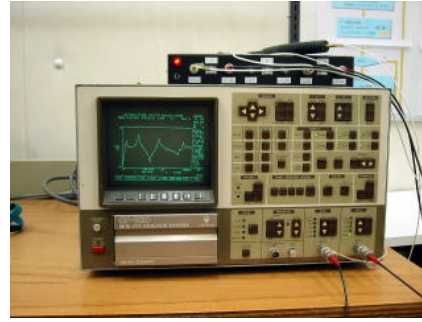


図 10 FFT アナライザ

表 2 振動センサのタイプ

測定量	タイプ	用途・特徴
加速度	圧電形	振動一般, 安価, 高感度
	ひずみ計形	振動一般, 低周波数域
	サーボ形	直流成分の測定, 地震
速度	レーザドップラ形	非接触, 高感度, 広帯域
	導電形	低周波, 大振幅
変位	渦電流形	非接触, 導電体
	静電形	非接触, 導電体
	光学式 (レーザ)	非接触, 大振幅
ひずみ	ひずみゲージ	振動一般

多自由度系の場合に伝達関数は、重ね合わせることで以下のように表せる。

$$G_{li}(\omega) = \sum_{r=1}^M \frac{1/K_r}{1 - \beta_r^2 + 2j\zeta_r\beta_r} \quad (4)$$

ここで、添字 li は i 点を加振し l 点を測定したことを表す。 r はモード次数、 M はモードの総数、 $K_r = k_r / (\phi_{ri}\phi_{rl})$ であり、 $\{\phi\}$ は固有モードベクトルであり各モード次数の振動パターンを表すものである。 図 11 に多自由度系のボード線図を示す。

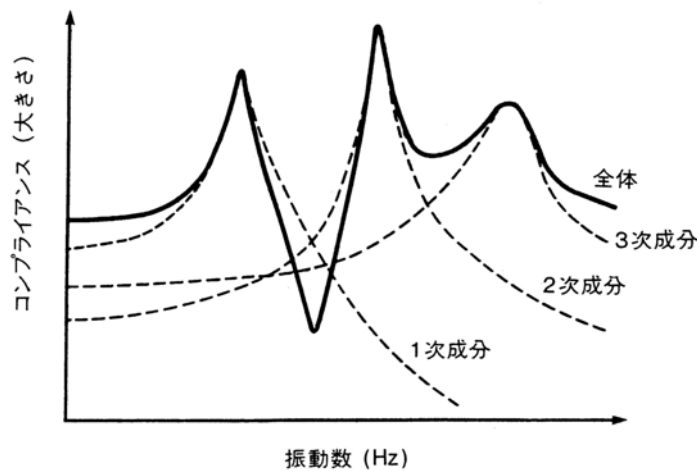


図 11 重ね合わせによる表現

実際の FRF の求め方（測定データの処理）は、FFT 解析装置による方法が広く利用されているが、ここでは、FFT については述べない。FRF を計算する際の原理のみを示す。

フーリエ級数では、一見複雑な波形の周期関数も調和関数の重ね合わせにより合成できた。

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) \quad (5)$$

ここで、 a_n および b_n はフーリエ係数である。一般的には、信号を周波数分析する際にはフーリエ変換が用いられる。すなわち、以下のようにフーリエスペクトルを計算する。

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (6)$$

また、実際の測定ではデータは有限の長さである。連続時間系の式(6)を離散時間系に変換すると

$$S_{x_n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \quad (7)$$

ここで、 N はデータ数を示す。入力と応答の信号のフーリエスペクトルをそれぞれ $S_x(f)$ および $S_y(f)$ とすると、伝達関数 $G(f)$ は以下のように表すことができる。

$$G(f) = \frac{S_y(f)}{S_x(f)} = \frac{S_y(f) S_x^*(f)}{S_x(f) S_x^*(f)} \quad (8)$$

ただし、添字*は複素共役を表す。実際には、加振・応答信号は、A/D変換器によりサンプリングされて離散データとされ、高速フーリエ変換（FFT）によりフーリエスペクトルを求める。

以下に、実験の際に必要なサンプリング定理について示す。データを測定するときのサンプリング時間 Δt と測定可能な上限周波数 f_{\max} の関係で

$$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (9)$$

である。また、離散データなので得られる伝達関数データの周波数分解能 Δf は、測定したデータ数 N との関係がある。

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (10)$$

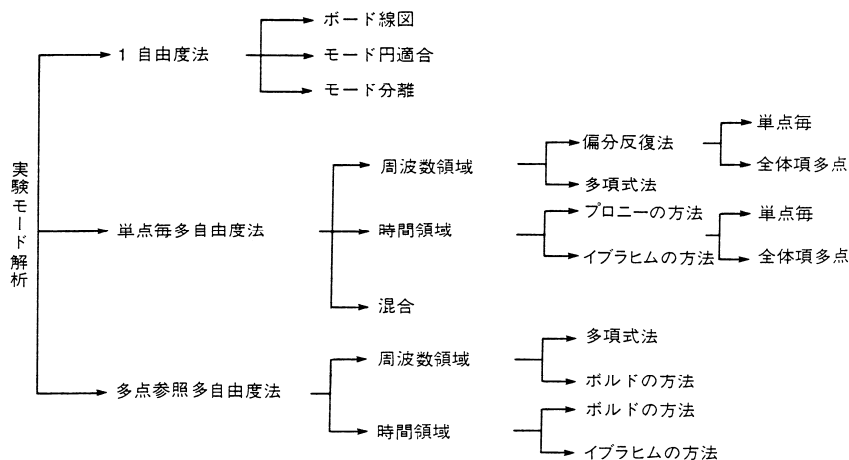


図 12 曲線適合の方法

振動実験によりモード特性を含んだ FRF データが得られる。次に、これらのデータからモード特性を抽出しなければならない。そのために、多くの手法が提案されており図 12 に示す。学部の振動工学の講義で習った、対数減衰率や Q 係数は最も簡便な手法の一つになる。

I. モード円適合（1自由度法）

以下では、1自由度法のモード円適合について示す。1自由度系の伝達関数（コンプライアンス）で減衰があまり大きくないときには、ナイキスト線図は円に近似できる。これを利用してモード特性を得る手法をモード円適合（circle curve fitting）と呼ぶ。また、多自由度系においても各共振ピークが十分に離れている場合には適用できる。

対象としている固有モードに対する他の固有モードの影響を完全に無視した1自由度系は、

$$G(\omega) = \frac{1/K}{1 - \beta^2 + 2j\zeta\beta} \quad (10)$$

と表せる。式(10)のナイキスト線図を考えると図 13 のように表すことができる。ここでの円は、

$$\text{半径} = \frac{\Omega^2}{4\omega_d K \sigma} \approx \frac{1}{4K\zeta}, \quad \text{中心} = \left(0, -\frac{1}{4K\zeta}\right) \quad (11)$$

で描くことができる。ただし、減衰が小さいとして、 $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \Omega \approx \Omega$ 、 $\sigma = \Omega\zeta$ の関係を用いている。しかし、実際の測定では他のモードの影響を無視できない。ここでは、対象の固有モードの共振点近傍においては、他のモードの影響を周波数に無関係な1つの複素定数 $R + jI$ で表現できると仮定すれば、

$$G(\omega) = \frac{1/K}{1 - \beta^2 + 2j\zeta\beta} + R + jI \quad (12)$$

となる。これにより、ナイキスト線図上の円は、中心が実軸方向に R 、虚軸方向に I だけずらされることを表す。

$$\text{中心} = \left(R, I - \frac{1}{4K\zeta}\right) \quad (13)$$

この円は、図 14 に示すようになる。この円の方程式は、実軸を x 虚軸を y とおけば

$$(x - R)^2 + \left\{y - \left(I - \frac{1}{4K\zeta}\right)\right\}^2 = \left(\frac{1}{4K\zeta}\right)^2 \quad (14)$$

となる。次に、上式を展開すると

$$x^2 + y^2 - 2Rx - 2\left(I - \frac{1}{4K\zeta}\right)y + R^2 + I^2 - \frac{I}{2K\zeta} = 0 \quad (15)$$

となり、これを以下のようにおく

$$x^2 + y^2 - ax - by - c = 0 \quad (16)$$

ただし、

$$a = 2R, \quad b = 2I - \frac{1}{2K\zeta}, \quad c = \frac{I}{2K\zeta} - R^2 - I^2 \quad (17)$$

式(16)は円の中心と半径を用いて表すと

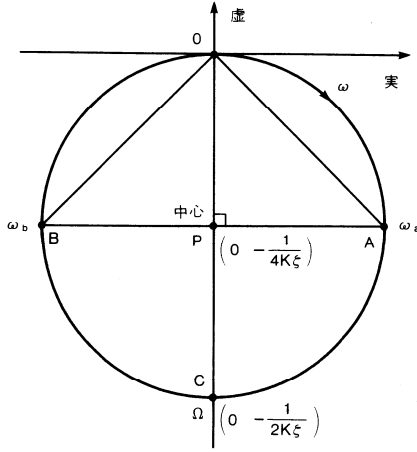


図 13 ナイキスト線図

(他のモードの影響が無い場合)

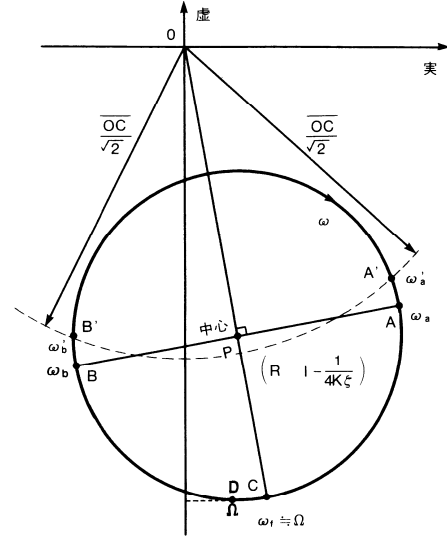


図 14 ナイキスト線図

(他の固有モードの影響が定数で近似できる場合)

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{a^2 + b^2}{4} \quad (18)$$

と変形できることは明らかである。すなわち、

$$\text{半径} = \sqrt{c + \frac{a^2 + b^2}{4}}, \quad \text{中心} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \quad (19)$$

とできる。ここで、円の方程式を決定するためには、3点のデータがあればよい。実際にはFRFのデータには誤差があるので、多数の点を用いて最小二乗法により係数を決定する。

測定したFRFのデータを式(16)に代入すると、一般には右辺はゼロにはならないので、その誤差を ε_i とおいて、以下の誤差関数を定義する。

$$\lambda = \sum_{i=1}^l \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^l (x_i^2 + y_i^2 - ax_i - by_i - c)^2 \quad (20)$$

ここで、 $l(>3)$ は測定値の数である。式(20)を用いて、 λ を最小にするように未定係数 a, b, c を決定する。すなわち、 a, b, c で微分した式をゼロにすればよい。

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = \sum \left\{ -2(x_i^2 + y_i^2 - ax_i - by_i - c)x_i \right\} = 2 \left\{ -\sum (x_i^3 + x_i y_i^2) + a \sum x_i^2 + b \sum x_i y_i + c \sum x_i \right\}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b} = \sum \left\{ -2(x_i^2 + y_i^2 - ax_i - by_i - c)y_i \right\} = 2 \left\{ -\sum (x_i^2 y_i + y_i^3) + a \sum x_i y_i + b \sum y_i^2 + c \sum y_i \right\}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial c} = \sum \left\{ -2(x_i^2 + y_i^2 - ax_i - by_i - c) \right\} = 2 \left\{ -\sum (x_i^2 + y_i^2) + a \sum x_i + b \sum y_i + cl \right\} \quad (21)$$

ただし、 Σ は $\Sigma_{i=1}^l$ を表す、式(21)をゼロとおいて、未定係数 a, b, c についてまとめると

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma y_i & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma (x_i^3 + x_i y_i^2) \\ \Sigma (x_i^2 y_i + y_i^3) \\ \Sigma (x_i^2 + y_i^2) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

となる。式(22)の左辺係数行列および右辺のベクトルは測定データから求められるので、円の方程式が決定できる。この円のしきから、図 14 中の点 C を求めれば固有振動数が決まる。

実際の手順は以下の用に行う。

- (1) 使用するデータを選ぶ。ナイキスト線図上で共振点 ω_{dr} 近傍の周囲の m 個データを採用する。
- (2) m 個のデータの座標 (x_i, y_i) から式(22)を作成して、 a, b, c を求める。
- (3) 固有振動数 Ω (ω_{n0}) を決定する。ナイキスト線図上にプロットされる点で、その間隔が最も広い箇所をとり、その両側のデータの中央点を求める。
- (4) モード減衰比 ζ を求める。
- (5) その他のモード特性を求める。

付録 A：モード円適合における減衰の推定

モード円適合の手順中のモード減衰比を推定する方法を述べる。式(10)を実数部と虚数部に分けると

$$G_R = \frac{(1 - \beta^2) / K}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \quad (A1)$$

$$G_I = \frac{-\zeta\beta / K}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \quad (A2)$$

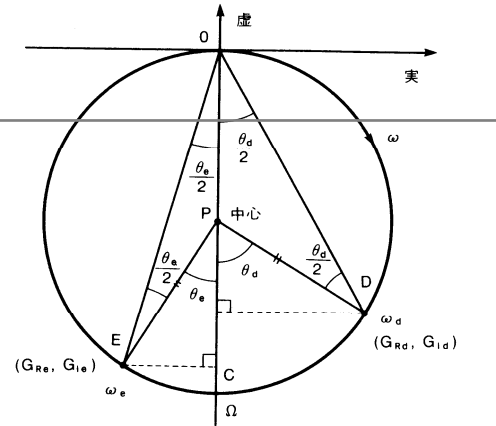


図 A1 減衰比の推定

図A1 中のD, Eは固有振動数 Ω を挟む 2 点である。そこでの角振動数を ω_d および ω_e として、 $\angle CPD = \theta_d$, $\angle CPE = \theta_e$ とする。したがって、

$$\tan \angle POD = \tan \frac{\theta_d}{2} = \frac{G_{Rd}}{-G_{Id}} = \frac{1 - \beta_d^2}{2\zeta\beta_d}$$

$$\tan \angle POE = \tan \frac{\theta_e}{2} = \frac{G_{Re}}{-G_{Ie}} = \frac{\beta_e^2 - 1}{2\zeta\beta_e} \quad (A3)$$

ここで、 $\beta_d = \frac{\omega_d}{\Omega}$ および $\beta_e = \frac{\omega_e}{\Omega}$ であり、点DおよびEの座標を各々 (G_{Rd}, G_{Id}) および (G_{Re}, G_{Ie}) とする。

式(A3)より

$$2\zeta\beta_d \tan \frac{\theta_d}{2} = 1 - \beta_d^2$$

$$2\zeta\beta_e \tan \frac{\theta_e}{2} = \beta_e^2 - 1$$
(A4)

式(A4)の2式を加えると

$$2\zeta \left\{ \beta_d \tan \frac{\theta_d}{2} + \beta_e \tan \frac{\theta_e}{2} \right\} = \beta_e^2 - \beta_d^2$$
(A5)

となり, 以下のようにできる.

$$\zeta = \frac{\beta_e^2 - \beta_d^2}{2 \left\{ \beta_d \tan \frac{\theta_d}{2} + \beta_e \tan \frac{\theta_e}{2} \right\}}$$
(A6)

1自由度法が適用できる程度に減衰が小さい場合には, 共振点の近傍では角振動数 ω がわずかに変化するだけで挟角が極めて大きくなる. そこで, 式(A6)の分母については

$$\omega_d \approx \omega_e \approx \Omega \quad \text{すなわち} \quad \beta_d \approx \beta_e \approx 1$$
(A7)

分子については,

$$\omega_d + \omega_e \approx 2\Omega \quad \beta_d + \beta_e \approx 1$$
(A8)

として, 近似すると

$$\zeta = \frac{(\beta_e - \beta_d)(\beta_e + \beta_d)}{2 \left\{ \beta_d \tan \frac{\theta_d}{2} + \beta_e \tan \frac{\theta_e}{2} \right\}} \approx \frac{(\beta_e - \beta_d)}{\tan \frac{\theta_d}{2} + \tan \frac{\theta_e}{2}} = \frac{(\omega_e - \omega_d)}{\Omega \left\{ \tan \frac{\theta_d}{2} + \tan \frac{\theta_e}{2} \right\}}$$
(A9)

もし, $\theta_d = \theta_e = 90^\circ$ になるように点 D および E を選ぶことができれば, $\tan 45^\circ = 1$ であるから,

$$\zeta = \frac{(\omega_e - \omega_d)}{2\Omega} = \frac{\Delta\omega}{2\Omega}$$
(A10)

とおける.

% モード円適合プログラム

% コンプライアンス

% 比例減衰

% 2008/6/2 関数省略

clear all;

clc

% Data file read

% データ読み込み

[dw, omega, freqn, realp, imagp, numdat, fname]=read
dat;

% Plot graph for experimental results

% グラフの描写

om1 = freqn(1);

om2 = freqn(numdat);

figure

graph(realp, imagp, freqn, om1, om2);

% Identification start

%

OK = 0;

while OK == 0

disp('Frequency ranges : Upper and Lower')

[om1, y, button]=ginput(1);

[om2, y, button]=ginput(1);

% グラフの書き直し

figure

graph(realp, imagp, freqn, om1, om2);


```

figure
nygraph(realp, imagp, freqn, om1, om2, dw);
[x, y, OK] = ginput(1);
end
% Data rearrange
omn1=round(om1/dw);
omn2=round(om2/dw);
n1 = omn2 - omn1 + 1

xr(1:n1)=realp(omn1:omn2);
xi(1:n1)=imagp(omn1:omn2);

% Mode Circle Fitting モード円適合
[a, b, c]=mcf1(xr, xi, n1);
a
b
c
%
r=sqrt((a/2)^2+(b/2)^2-c);
for qd=0:360
qr=qd/180*pi;
qxr(qd+1)=r*cos(qr)+(-a/2);
qxi(qd+1)=r*sin(qr)+(-b/2);
end

% wdr の計算
max=0;
for i=2:n1
dis=(xr(i)-xr(i-1))^2 +
(xi(i)-xi(i-1))^2;
if max < dis
max = dis;
ind = i;
end
end
max;
ind;
% 簡便法
wdr=dw*((ind+omn1-1)+(ind+omn1))/2;

```

```

xd=(xr(ind)+xr(ind-1))/2;
yd=(xi(ind)+xi(ind-1))/2;

be=dw*(ind+omn1)/wdr;
bd=dw*(ind+omn1-1)/wdr;

s=abs((yd-(-b/2))/(xd-(-a/2)));
s0=atan2(yd-(-b/2), xd-(-a/2));
s1=atan2(xi(ind)-(-b/2), xr(ind)-(-a/2));
s2=atan2(xi(ind-1)-(-b/2), xr(ind-1)-(-a/2));

if sign(s0) ~= sign(s1)
s1=s1 - sign(s1)*pi;
end
if sign(s0) ~= sign(s2)
s2=s2 - sign(s2)*pi;
end

qd=abs(s0-s1); qe=abs(s2-s0);
zeta=(be^2-bd^2)
/(2*(bd*tan(qd/2)+be*tan(qe/2)))

Rr= -a/2
if (-b) < 0
lr = (-b + sqrt(b^2+4*(Rr^2-c)))/2
else
lr = (-b - sqrt(b^2+4*(Rr^2-c)))/2
end
Kr=1/(2*(2*lr+b)*zeta)
KrINV=2*(2*lr+b)*zeta

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fdw=dw/1;
wide=dw/fdw;
n2=n1*wide;
clear i;
for i=1:n2
w=(fdw*i+omn1*dw)*2*pi;

```

```

beta=w/(wdr*2*pi);
G(i) = (1/Kr)
        /(1 - beta^2 + 2*j*zeta*beta)
        + Rr + lr;
end
cxr=real(G);
cxi=imag(G);

nygraph2(xr,xi,dw,n1,cxr,cxi,fdw,n2,qxr,qxi);
%
eig1 = [' eigen=' num2str(wdr)];
sig1 = [' zeta=' num2str(zeta)];
mod1 = [' 1/Kr=' num2str(Kr INV)];
mod2 = [' Rr=' num2str(Rr)];
mod3 = [' lr=' num2str(lr)];
%
figure
xptext(eig1,sig1,mod1,mod2,mod3)

```

多自由度法（単点毎）

II. プロニーの方法（時間領域法）

この方法は時間領域法であり，単位インパルス応答からモード特性を求める．単位インパルス応答は，実際の応答波形を用いるのではなく，伝達関数を逆フーリエ変換することで得られる．直接インパルス応答波形を用いないのは，周波数応答関数を求める際に平均化を行うので，測定ノイズの影響を低減することが期待できる．また，逆フーリエ変換をする際に，周波数範囲を限定することにより，周波数範囲を限定することで特定の固有モードのみを対象とすることができる．しかし，欠点としては，逆フーリエ変換の際に，周波数範囲が有限であることによる打ち切り誤差が生じ，逆変換後の時間領域データを歪めてしまう．以下では，一般粘性減衰系の場合について説明する．

単位衝撃応答は次のように表される．

$$h(t) = \sum_{r=1}^n (a_r e^{S_r t} + a_r^* e^{S_r^* t}) \quad (23)$$

ただし，*は複素共役を表し，留数 a_r および固有値 S_r は以下のように表される．

$$\begin{aligned} a_r &= U_r + jV_r \\ S_r &= -\sigma_r + j\omega_{dr} \end{aligned} \quad (24)$$

データを取得する際のサンプリング間隔を Δt とすれば，時刻 $t = i \Delta t$ において式(23)は

$$h(i \Delta t) = \sum_{r=1}^n (a_r e^{S_r i \Delta t} + a_r^* e^{S_r^* i \Delta t}) \quad (25)$$

$h(i \Delta t)$ を $h(i)$ と表し

$$x_r = e^{S_r \Delta t} \quad (26)$$

とおけば

$$h(i) = \sum_{r=1}^n (a_r x_r^i + a_r^* x_r^{*i}) = \sum_{r=1}^{2n} a_r x_r^i \quad (27)$$

ここで， $x_r (r = 1, 2, \dots, 2n)$ を根とした， $2n$ 次の代数方程式を考える．

$$\prod_{r=1}^{2n} (x - x_r) = \prod_{r=1}^n (x - x_r)(x - x_r^*) = x^{2n} + b_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0 \quad (28)$$

すなわち

$$\sum_{i=0}^{2n} b_i x^i = 0 \quad (29)$$

ただし,

$$b_{2n} = 1 \quad (30)$$

ここで, $h(i)$ に b_i を乗じたものを, $i = 0, 1, \dots, 2n$ について足し合わせると

$$\begin{aligned} b_0 h(0) &= b_0 a_1 x_1^0 + b_0 a_2 x_2^0 + \dots + b_0 a_{2n} x_{2n}^0 \\ b_1 h(1) &= b_1 a_1 x_1^1 + b_1 a_2 x_2^1 + \dots + b_1 a_{2n} x_{2n}^1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ +) b_0 h(0) &= b_0 a_1 x_1^0 + b_0 a_2 x_2^0 + \dots + b_0 a_{2n} x_{2n}^0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sum_{i=0}^{2n} b_i (h_i) = a_1 \sum_{i=0}^{2n} b_i x_1^i + a_2 \sum_{i=0}^{2n} b_i x_2^i + \dots + a_{2n} \sum_{i=0}^{2n} b_i x_{2n}^i$$

$x_r (r = 1, 2, \dots, 2n)$ は式(29)の根なので, いずれも零になる. すなわち,

$$\sum_{i=0}^{2n} b_i h(i) = 0 \quad (32)$$

式(30)を用いれば,

$$h(2n) = - \sum_{i=0}^{2n-1} b_i h(i) \quad (33)$$

この関係は, 時間を全体に k だけ移動させても成り立つので,

$$h(k+2n) = - \sum_{i=0}^{2n-1} b_i h(k+i) \quad (34)$$

すなわち, 連続する $2n+1$ 個の時系列データがあるとき, 最初の $2n$ 個の線形結合によって次のデータを予測できることを示している.

未知係数 $b_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ を求めるには式(34)を $2n$ 組み作成して, 次の連立方程式を解くとよい.

$$\begin{bmatrix} h(0) & \dots & h(2n-1) \\ \vdots & & \vdots \\ h(2n-1) & \dots & h(4n-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h(2n) \\ \vdots \\ h(4n-1) \end{bmatrix} \quad (35)$$

ただし, これでは測定データに誤差が含まれている場合には, その影響を直接受けてしまう. 一般には, 同定する固有モード数は多くても数十個程度であると考えられるが, 時系列データ数はそれに比較すると十分多いので, 最小自乗法により求める. ここで, 時系列データ数を m 個として式(34)を用いると

$$\mathbf{H} \mathbf{b} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (36)$$

ただし, $\boldsymbol{\varepsilon}$ は誤差ベクトルであり,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h(0) & \dots & h(2n-1) \\ \vdots & & \vdots \\ h(m-2n-1) & \dots & h(m-2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = - \begin{bmatrix} h(2n) \\ \vdots \\ h(m-1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{m-2n} \end{bmatrix} \quad (37)$$

である. この誤差ベクトルにより計算される誤差関数 λ を最小にすることを考える.

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m-2n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \varepsilon \quad (38)$$

これは、線形の最小自乗法により解くことができる。

$$\mathbf{b} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (39)$$

これにより、未知ベクトル \mathbf{b} が定まる。これにより \mathbf{b}_i が求まれば式(28)の $2n$ 次の代数方程式を解くことで、根 $\mathbf{x}_r (r=1,2,\dots,2n)$ を得ることができる。 \mathbf{b}_i は実数であるが、根 \mathbf{x}_r は実数以外に複素数になる

こともあり、その場合は共役複素数 \mathbf{x}_r^* も根である。式(24), (26)より

$$\mathbf{x}_r = \exp(-\sigma_r + j\omega_{dr})\Delta t \quad (40)$$

あるいは、

$$\mathbf{x}_r = e^{-\sigma_r \Delta t} (\cos \omega_{dr} \Delta t + j \sin \omega_{dr} \Delta t) \quad (41)$$

複素平面上で、根 \mathbf{x}_r の位置を示すと図 15 のようになる。したがって、

$$\sigma_r = -\frac{\ln |\mathbf{x}_r|}{\Delta t} \quad (42)$$

$$\omega_{dr} = \frac{1}{\Delta t} \angle \mathbf{x}_r \quad (43)$$

ただし、 $|\mathbf{x}_r|$ および $\angle \mathbf{x}_r$ はそれぞれ複素数 \mathbf{x}_r の絶対値および偏角を示す。

また、式 (24), (27)から

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(i) &= \sum_{r=1}^n ((U_r + jV_r)(x_{rR}^i + jx_{rI}^i) + (U_r - jV_r)(x_{rR}^i - jx_{rI}^i)) \\ &= 2 \sum_{r=1}^n (x_{rR}^i U_r - x_{rI}^i V_r) \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 x_{rR}^i および x_{rI}^i はそれぞれ \mathbf{x}_r^i の実数部と虚数部を表す。式(44)は、 U_r および V_r に対して線形である。そこで m' 個 ($m' \geq 2n$) の時系列データを用いて式(44)を m' 通り作成して行列の形にまとめる。

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{Q} \quad (45)$$

ただし、

$$\mathbf{P}^T = \{U_1 U_2 \cdots U_{n-1} U_n V_1 V_2 \cdots V_{n-1} V_n\}$$

$$\mathbf{Q}^T = \{h(1) h(2) \cdots h(m')\}$$

である。ここで、根 \mathbf{x}_r は既知なので、係数行列 \mathbf{A} は容易に作成できる。これも最小自乗法を適用すれば

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \quad (46)$$

となり、固有モードを求めることができる。

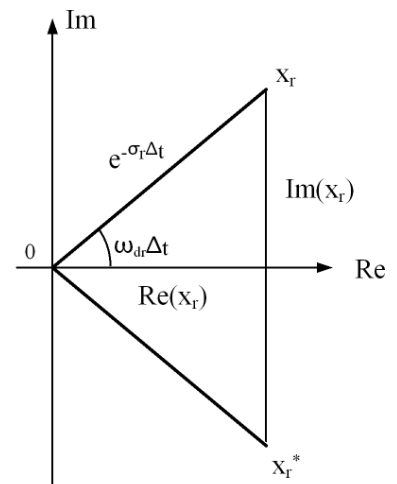


図 15 複素平面上の根

プロニーの方法は代数方程式の根を求める必要があるが、固有値問題を解くことに置き換えたイブラヒムの方法も時間領域の方法としては代表的な手法である。

Ⅲ. 偏分反復法（周波数領域法）

これは、振動試験により得られた周波数応答関数データを非線形最小自乗法により伝達関数の方程式に当てはめるものである。

式(3)の比例粘性減衰の周波数応答関数において、剰余項を考慮すると以下ようになる。

$$G = \sum_{r=1}^n \frac{1/K_r}{1 - \beta_r^2 + 2j\zeta_r\beta_r} - \frac{1}{\omega^2 S} + \frac{1}{Z} \quad (47)$$

ここで、SおよびZはそれぞれ剰余質量と剰余剛性であり、ここでは実数とおく。振動試験により得られる伝達関数の実験データを式(47)の形で表現するためには、式中の $3n+2$ 個の未知数、すなわち β_r , ζ_r , K_r ($r=1, \dots, n$) とS, Zを決定する必要がある。 β_r と ζ_r については非線形項となるので、初期値を与えて、実験データと式(47)からの計算値の誤差が最小になるように反復計算を行う。未知数をまとめて γ_h ($h=1, \dots, 3n+2$) とすると、反復計算により真の値に近づけてゆくために

$$\gamma_h = \gamma_{hs} + \Delta\gamma_h \quad (48)$$

の更新を考える。ただし、 γ_{hs} は初期値 $\Delta\gamma_h$ は変更量である。式(47)において $\Delta\gamma_h$ に関してテイラー展開して近似的に1次項まで考慮すると以下ようになる。

$$G(\omega, \gamma_h) \approx G(\omega, \gamma_{hs}) + \sum_{r=1}^{3n+2} \frac{\partial G}{\partial \gamma_h}(\omega, \gamma_{hs}) \cdot \Delta\gamma_h = A_{Re} + jA_{Im} \quad (49)$$

ここで、 $\partial G / \partial \gamma_h$ は、 $B_r=1/K_r$, $C=1/S$, $D=1/Z$ と書き換えると、次のようになる。

$$\frac{\partial G}{\partial \beta_r} = \frac{-B_r(-2\beta_r + 2j\zeta_r)}{(1 - \beta_r^2 + 2j\zeta_r\beta_r)^2} \quad (r = 1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta_r} = \frac{-B_r(2j\beta_r)}{(1 - \beta_r^2 + 2j\zeta_r\beta_r)^2} \quad (r = 1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial G}{\partial B_r} = \frac{1}{(1 - \beta_r^2 + 2j\zeta_r\beta_r)} \quad (r = 1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial G}{\partial C} = -\frac{1}{\omega^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial D} = 1 \quad (50)$$

伝達関数が m 個の角振動数 ω_i ($i = 1, \dots, m$) の実験データとして求められたとする。このとき、誤差関数 λ を各角振動数の伝達関数の実験データと計算値の実数部と虚数部の差の2乗和として定義する。

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \{(G_{Rei} - A_{Rei})^2 + (G_{Imi} - A_{Imi})^2\} \quad (51)$$

これを $\Delta\gamma_h$ で微分して零とおくと

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Delta \gamma_h} = 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial A_{Rei}}{\partial \Delta \gamma_h} (A_{Rei} - G_{Rei}) + \frac{\partial A_{Imi}}{\partial \Delta \gamma_h} (A_{Imi} - G_{Imi}) \right\} = 0 \quad (52)$$

となる。式(49)のように考えたので、 A_{Rei} および A_{Imi} は $\Delta \gamma_h$ の1次式である。したがって、式(51)中の $\Delta \gamma_h$ に関する微分は、初期値 γ_{hs} を与えれば式(50)から決定される。また、 G_{Rei} および G_{Imi} は実験データある。よって、式(52)を $\Delta \gamma_h$ についてまとめることができ、 $3n+2$ 元の1次方程式となり、これを解けば $\Delta \gamma_h$ が求められる。変更量 $\Delta \gamma_h$ を式(48)に代入して次の初期値として、同様な計算を反復して行う。この反復計算を($\Delta \gamma_h / \gamma_h$)が十分小さくなるまで繰り返すことで γ_h を決定できる。

多自由度法 (多点参照)

現在の主流の方法である。LSCF, (p-LSCF, 商標: PloyMAX) や部分空間法などがあるが、これらの詳細な内容についてはここでは省略する。