自励振動について

振動の励起には，それ自身が振動的な外力によるものと振動的ではない外力によるものがあり，後者を自励振動と呼ぶことは知っていると思います．ビデオ（振動の世界）でも自励振動またはフラッターなどの言葉で登場していたが，ここでは，少し理論的に説明をする．また，関連した振動として係数励振振動についても述べる．

１．自励振動について（ベルトコンベア上の物体について）

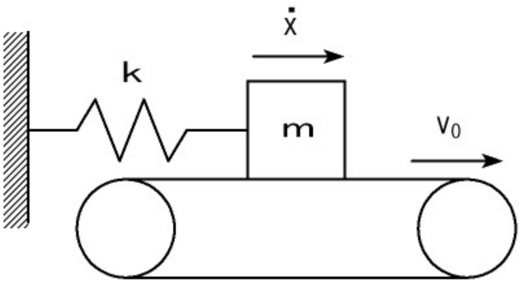

図１　ベルトコンベア上の物体

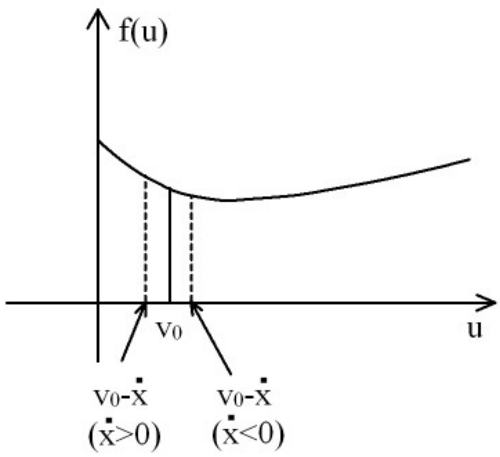

図２　乾性摩擦力

ベルトコンベア上に置かれた物体が乾性摩擦を受ける場合を考える．物体の速度を$\dot{x}$，ベルトの速度をv_0とすると，すべり摩擦力fは相対速度$u = v_0 - \dot{x}$の関数となる．すべり摩擦力の傾向は図２のように表される．乾性摩擦については，「大きさは一定で速度の反対向きに働く」との仮定をしてきたが，現実には図のように速度が低い範囲では摩擦力は減少するので，負抵抗が働くことになる．この運動方程式を考える場合，$|\dot{x}| << v_0$では

$$m\ddot{x} = -kx + f(v_0 - \dot{x}) \tag{1}$$

ここで，摩擦力を１次近似すると

$$f(v_0 - \dot{x}) \approx f(v_0) - f'(v_0)\dot{x} \tag{2}$$

とおけるので

$$m\ddot{x} = -kx + f(v_0) - f'(v_0)\dot{x} \tag{3}$$

となる．速度が小さい場合には，$f'(v_0) < 0$であることに注意して，$f(v_0) = a$および$f'(v_0) = -b$とおくと（a, b は正の定数）

$$m\ddot{x} = -kx + a + b\dot{x} \tag{4}$$

さらに，$\xi = x - a/k$とおくと

$$m\ddot{\xi} - b\dot{\xi} + k\xi = 0 \tag{5}$$

となる．式(5)は定数係数の２階線形微分方程式となる．これは，速度項の係数の符号がマイナスになっており，自由振動の運動方程式と逆になっていることがわかる．すなわち，負減衰になっており，振動

が増大して行くことがわかる．

問題１　式(5)の運動方程式を解け

解：

$$\xi = \begin{cases} C_1 \exp\left(\dfrac{b+\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t\right) + C_2 \exp\left(\dfrac{b-\sqrt{b^2-4mk}}{2m}t\right) & (b^2 > 4mk) \\ (C_1 + C_2 t)\exp\left(\dfrac{b}{2m}t\right) & (b^2 = 4mk) \\ A\exp\left(\dfrac{b}{2m}t\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t+\delta\right) & (b^2 < 4mk) \end{cases} \tag{6}$$

上記のように，3 通りの解が導かれるが，いずれも指数関数的に増大して行くことがわかる．各自で，式(6)を導いてみること．

実際には，振動が増大すると速度も増すことになるので，摩擦力が正の傾きを持つ範囲に入って行くので，振幅は無限に増大するのではなく，一定の大きさに収束することになる．

２．ファンデルポール方程式

上述のベルトコンベアの負抵抗による振動を解析するためには，速度と抵抗力の関係を知る必要がある．ここでは問題を簡単に整理して，抵抗力の符号が振幅により変化するような方程式を考える．

$$\ddot{x} = -\varepsilon(x^2-1)\dot{x} - x \tag{7}$$

ただし，$\varepsilon > 0$ である．式(7)をファンデルポール方程式(Van der Pol Equation)と呼び，係数変動による自励振動を考える際によく用いられる方程式である．式(7)の $\varepsilon(x^2-1)$ が変位振幅に依存する抵抗と考えられる．この項が振幅により符号が変化することになる．すなわち，$|x|>1$ の場合には $\varepsilon(x^2-1)>0$ となり正の抵抗力を発生するので振幅を減少させ，$|x|<1$ の場合には $\varepsilon(x^2-1)<0$ となり負の抵抗力となり振幅を増大させる．

以下では，ファンデルポール方程式を数値的に解析することにする．ここでは，オイラー法により運動方程式を次のように書き直す．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \varepsilon(1-x^2)v - x \end{aligned} \tag{8}$$

これを差分式の変形して

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t \cdot v_n \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t \cdot [\varepsilon(1-x^2)v_n - x_n] \end{aligned} \tag{9}$$

とする．ここで，刻み時間 $\Delta t = 0.01s$ として数値計算する．

３．係数励振振動

例としてブランコをこいで振動をさせる場合について考える．ブランコをこぐときは，重心を上下して振幅を増やしてゆく，図３にその簡易モデルで表す.

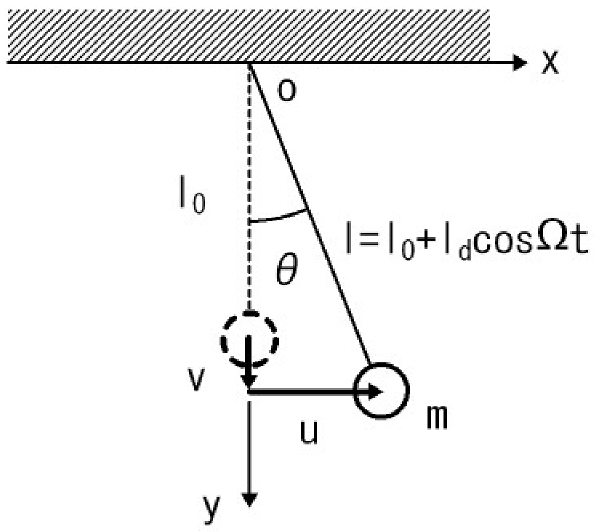

図３　ブランコの簡易モデル

水平方向にｘ軸，垂直方向にｙ軸をとり，それぞれの方向の変位を ｕ, ｖとする．ひもに働く張力をＴとおくと，質点ｍの運動方程式は

$$\begin{aligned} -T\frac{u}{l} &= m\ddot{u} \\ -T\frac{l_0+v}{l}+mg &= m\ddot{v} \end{aligned} \tag{10}$$

式(10)から張力Ｔを消去すると

$$(l_0+v)\ddot{u}+gu-u\ddot{v}=0 \tag{11}$$

座標 θ を用いて，$u=l\sin\theta$，$v=l\cos\theta-l_0$ を代入して整理する.

$$l\ddot{\theta}+2\dot{l}\dot{\theta}+g\sin\theta=0 \tag{12}$$

次に，$s=l\theta$ とおいて，ｓについての式を導くものとする．ｓを時間ｔで２階微分する.

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{l}\theta+l\dot{\theta} \\ \ddot{s} &= \ddot{l}\theta+2\dot{l}\dot{\theta}+l\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{13}$$

式(13)を変形すると $l\ddot{\theta}+2\dot{l}\dot{\theta}=\ddot{s}-\ddot{l}\theta$ となり，これを式(12)に代入すると

$$\ddot{s}-\ddot{l}\theta+g\sin\theta=0 \tag{14}$$

となる．ここで振り子の角変位 θ は１に比べて十分小さく $\sin\theta\approx\theta$ 　と近似できるので，式(14)は

$$\ddot{s}-\ddot{l}\theta+g\theta=0 \tag{15}$$

であるので，θをsで表すと

$$\ddot{s}+\frac{1}{l}(g-\ddot{l})s=0 \tag{16}$$

となる．ここで，重心の上下運動を $l=l_0+l_d\cos\Omega t$ と仮定しているので，$\ddot{l}=-l_d\Omega^2\cos\Omega t$ とできる．これを式(16)に代入すると

$$\ddot{s}+\frac{1}{l_0+l_d\cos\Omega t}(g+l_d\Omega^2\cos\Omega t)s=0 \tag{17}$$

ここで，(l_d/l_0) が小さいとして，２次以上の項を無視すると

$$\ddot{s}+\frac{g}{l_0}\left[1+\frac{l_d}{l_0}\left(-1+\frac{l_0\Omega^2}{g}\right)\cos\Omega t\right]s=0 \tag{18}$$

となる．

確認せよ

式(17)から(18)の変形を導け．

$$(a+x)^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\cdots$$

を用いることで，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l_0+l_d\cos\Omega t}(g+l_d\Omega^2\cos\Omega t)\\
&=\frac{g}{l_0}\frac{1}{1+\frac{l_d}{l_0}\cos\Omega t}(1+\frac{l_d\Omega^2}{g}\cos\Omega t)\\
&=\frac{g}{l_0}\left[1-\frac{l_d}{l_0}\cos\Omega t+O\left(\left(\frac{l_d}{l_0}\right)^2\right)\right]\left(1+\frac{l_d\Omega^2}{g}\cos\Omega t\right)\\
&=\frac{g}{l_0}\left[1+\frac{l_d}{l_0}\left(-1+\frac{l_0\Omega^2}{g}\right)\cos\Omega t\right]+O\left(\left(\frac{l_d}{l_0}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

と変形できる．したがって，式(18)が導ける．

式(18)をより一般的にすると以下のように書くことができる．

$$\ddot{x}+{\omega_n}^2(1+q_d\cos\omega t)x=0 \tag{19}$$

この式は，マシュー方程式（Mathieu's Equation）と呼ばれ，係数励振系を表す基礎式としてよく知られている．すなわち，ωにより係数が変動して励振されることになる．以下ではマシュー方程式について考察する．

方程式の応答が加振振動数に同期するものとして，次式の周期解を仮定する．

$$x = C_1 \cos \omega t + S_1 \sin \omega t \tag{20}$$

なお C_1 および S_1 は未定定数である．これを式(19)に代入すると

$$({\omega_n}^2 - \omega^2) C_1 \cos \omega t + ({\omega_n}^2 - \omega^2) S_1 \sin \omega t \tag{21}$$

摩擦力：ブレーキの鳴き

時間遅れ：工作機械の再生びびり

係数励振：ぶらんこ